

Polycopié d'analyse avancée III

Section de mathématiques

Rédigé par

Charles Pottier, Luca Dalmas et Timon Miebling

Et supervisé par

Joachim Krieger et Timon Miebling

Basé sur le cours de

Joachim Krieger

Compilé le 20 décembre 2025

Lausanne, année académique 2025 – 2026

The logo of EPFL (École Polytechnique Fédérale de Lausanne) is displayed in a bold, red, sans-serif font. The letters are thick and blocky, with a slight shadow effect.

Table des matières

1 Fonctions Complexes	1
1.1 Introduction	1
1.1.1 Le Corps des Nombres Complexes	1
1.1.2 Le Plan Complexe	1
1.1.3 Rappels d'Analyse Vectorielle	2
1.1.4 Théorème Fondamental de l'Algèbre	3
1.2 Fonctions Analytiques	4
1.2.1 Rappels dans \mathbb{R}	4
1.2.2 Passage à \mathbb{C}	5
1.2.3 Convergence Normale & Rayon de Convergence	6
1.2.4 Analyticité & Recentrage	8
1.3 Topologie de \mathbb{C}	10
1.3.1 Fonctions analytiques spéciales	11
1.3.2 Périodicité de e^z	12
2 Fonctions Holomorphes	15
3 Intégration de fonctions	21
3.1 Introduction	21
3.2 Propriétés clés	23
3.3 Intégrales le long de lacets pour des fonctions holomorphes ; situation spéciale	26
3.3.1 Concepts topologiques	27
4 Théorème de Cauchy et analyticité des fonctions holomorphes	36
4.1 Principe du maximum pour fonctions holomorphes	41
5 Singularités des fonctions holomorphes	43
5.1 Séries de Laurent	44
5.2 Analyse des singularités des fonctions holomorphes	48
5.3 Fonction méromorphes	48
5.3.1 Structure générale des fonctions méromorphes	48
5.3.2 Fonction méromorphe particulière	51
5.4 Fin de la classification des singularités	55
5.4.1 Théorème des Résidus	55
5.4.2 Applications du théorème des résidus	58
5.4.3 Transformé de Fourier	60
6 Théorème des nombres premiers	62

7	Applications conformes	73
7.1	Fonction biholomorphes $f : U \rightarrow U$	74
7.1.1	Fonctions biholomorphes $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$	74
7.2	Conséquences du théorème de Riemann	75
7.2.1	Un cas spécial : $U = \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$	75
8	Analyse vectorielle dans \mathbb{R}^n	77
8.1	Notions d'intégrations	77
8.1.1	Intégrale curviligne d'un champ scalaire le long d'un chemin	77
8.1.2	Circulation d'un champ vectoriel le long d'un chemin	77
8.1.3	Quelques définitions	86
8.2	Théorème de la Divergence / Gauss-Ostrogradsky	89
8.2.1	Quelques exemples physiques	92
8.2.2	Champ vectoriel généré par une distribution de masse	93

Chapitre 1

Fonctions Complexes

1.1 Introduction

1.1.1 Le Corps des Nombres Complexes

Définition 1.1 (\mathbb{C}).

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 + 1 = 0\}$$

Pour $z = a + bi$, on note $a = \Re(z)$ et $b = \Im(z)$, et $z' = c + di : z + z' = (a + c) + (b + d)i$ et $zz' = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Proposition 1.2 (\mathbb{C} est un corps). $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un corps, i.e. :

- $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe abélien, avec 0 comme élément neutre ;
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif, avec 1 comme élément neutre et 0 comme élément absorbant et $z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$;
- la distributivité est valable dans \mathbb{C} .

1.1.2 Le Plan Complexe

On remarque que l'on peut faire correspondre \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 par l'isomorphisme $a + bi \longleftrightarrow (a, b)$, et on en déduit une représentation des nombres complexes sur un plan (plan complexe ou de Gauss : $\mathbb{R} \times i\mathbb{R}$).

Propriété 1.3. — L'addition complexe correspond à l'addition de vecteurs.

- La symétrie d'axe \mathbb{R} étant utile, on donne une notation pour son équivalent complexe : $\bar{z} = a - bi$.
- Le "module" $|z|$ de z correspond à la longueur du vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, qui vaut $\sqrt{a^2 + b^2}$. On remarque par un simple calcul que $|zz'| = |z||z'|$.

On a alors $z = |z| \frac{\bar{z}}{|z|}$, avec $|\frac{\bar{z}}{|z|}| = 1$, donc $\frac{\bar{z}}{|z|} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, pour θ défini à un multiple de 2π près qu'on appelle $\arg(z)$. Grâce à deux identités trigonométriques sur \sin et \cos , on déduit que $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$, et donc finalement, $zz' = |z||z'| (\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$. Pour $z \in \mathbb{C}^*$, l'application $T_z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $w \mapsto zw$ (qui est \mathbb{R} -linéaire, et même \mathbb{C} -linéaire) correspond à la composition de la rotation d'angle $\arg(z)$ et de l'homothétie de rapport $|z|$. T_z a donc la particularité de préserver les angles entre les vecteurs.

Remarque 1.4. On introduit l'exponentielle complexe (pour l'instant comme une définition) : $e^{i\theta} := \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. On a alors $z = |z|e^{i\theta}$ (représentation polaire de y , dont les coordonnées polaires sont $|z|$ et $\arg(z)$), et comme pour l'exponentielle : $\log(z) = \log(|z|) + i \arg(z)$.

Remarque 1.5. Comme mentionné précédemment, l'argument n'est défini qu'à un multiple de 2π près, mais est totalement défini sur $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ (et prend alors des valeurs dans $(-\pi, \pi)$), ce qui permet au logarithme d'être une fonction (non multivariée).

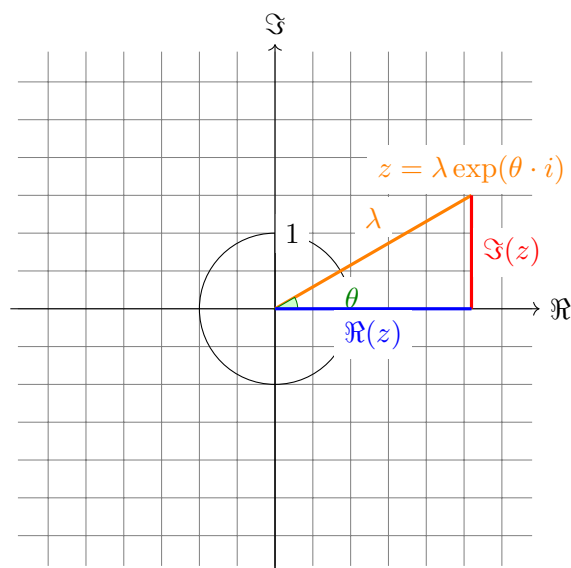


FIGURE 1.1 – Illustration du nombre complexe $z = \lambda \exp(\theta \cdot i)$.

1.1.3 Rappels d'Analyse Vectorielle

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Théorème 1.6 (Différentiabilité (1)). f est différentiable en \mathbf{x}_0 ssi $\exists A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ tel que

$$f(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$$

Dans ce cas, A est la matrice Jacobienne,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

On rappelle que différentiabilité \implies continuité.

Théorème 1.7 (Différentiabilité (2)). Si les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$) existent pour tout \mathbf{x} dans un voisinage de \mathbf{x}_0 et sont continues en \mathbf{x}_0 , alors f est différentiable en \mathbf{x}_0 .

Théorème 1.8 (Inversion Locale). Si $m = n$ et f est continûment différentiable avec $D_f(\mathbf{x}_0)$ inversible, alors f est un difféomorphisme local en \mathbf{x}_0 , i.e., on peut restreindre le domaine de f à un voisinage U de \mathbf{x}_0 de manière à former une bijection, avec son inverse aussi continûment différentiable. Si g est son inverse local, on a alors que

$$Dg(f(\mathbf{x})) = (Df(\mathbf{x}))^{-1}, \forall \mathbf{x} \in U.$$

Remarque 1.9. Une fonction complexe f peut toujours s'écrire comme $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$, où u et v sont des fonctions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. On fera alors l'analogie par $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $\tilde{f}(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$ et on s'intéressera à la matrice $\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$. (On peut évidemment considérer des fonctions définies sur des sous-ensembles de \mathbb{R}^2 .)

1.1.4 Théorème Fondamental de l'Algèbre

Théorème 1.10 (Théorème Fondamental de l'Algèbre). Soit $p(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$, avec $n > 0$, les $a_i \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$. Alors $\exists z_\star \in \mathbb{C}$ tel que $p(z_\star) = 0$.

Démonstration. Stratégie : trouver un $z_\star \in \mathbb{C}$ tel que $|p(z)|$ atteint son minimum sur \mathbb{C} en z_\star .

(1). Supposons ensuite, par l'absurde, que $|p(z_\star)| > 0$, et construisons un z qui vérifie $|p(z)| < |p(z_\star)|$

(2).

1. Observons que $|p(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \infty$, car :

$$|p(z)| = \left| \sum_{i=0}^n a_i z^i \right| \geq |a_n z^n| - \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i \right| \geq |z|^n \left(|a_n| - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| |z|^{i-n} \right)$$

et si $|z| \geq 1$,

$$\geq |z|^n \left(|a_n| - |z|^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \right) \geq |z|^n (|a_n| - |z|^{-1} (\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| + 1))$$

$$\text{si } |z| \geq \frac{2(\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| + 1)}{|a_n|},$$

$$\geq |z|^n (|a_n| - \frac{|a_n|}{2}) = |z|^n \frac{|a_n|}{2} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \infty.$$

Comme $\inf_{z \in \mathbb{C}} |p(z)|$ existe (car ≥ 0), soit $\{z_k\}_{k \geq 1} \subset \mathbb{C}$ tel que $\lim_{k \rightarrow \infty} |p(z_k)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |p(z)|$.

Si $\lim_{k \rightarrow \infty} |z_k| = \infty$, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} |p(z_k)| = \infty$ (cf ci-dessus), ce qui est absurde, car $\inf_{z \in \mathbb{C}} |p(z)| \leq |a_0|$. Donc on sait que $\{z_k\}_{k \geq 1}$ admet une sous-suite $\{z_{k_j}\}_{j \geq 1}$ dont le module est borné par $r \geq 0$, i.e. $\{z_{k_j}\} \subseteq \overline{B(0, r)}$ qui est compact. Donc on peut extraire une sous-suite convergente vers z_\star , $\{z_{k_{j_\ell}}\}_{\ell \geq 1} \subseteq \overline{B(0, r)}$. Par continuité de $|p(z)|$, $|p(z_\star)| = \lim_{\ell \rightarrow \infty} |p(z_{k_{j_\ell}})| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |p(z)|$, qui est donc atteint.

2. Supposons par l'absurde que $|p(z_\star)| > 0$. Utilisons la propriété de recentrage pour recentrer p en z_\star .

$$z = (z - z_\star) + z_\star \Rightarrow z^j = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (z - z_\star)^k z_\star^{j-k},$$

un polynôme en $(z - z_\star)$. Donc on peut réécrire

$$p(z) = \sum_{j=0}^n a_j \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (z - z_\star)^k z_\star^{j-k},$$

on remarque que $0 \leq k \leq j \leq n$, en fixant k , on a donc que j parcourt $\{k, k+1, \dots, n\}$. On peut réécrire le polynôme comme :

$$p(z) = \sum_{k=0}^n \underbrace{\left(\sum_{j=k}^n a_j \binom{j}{k} z_\star^{j-k} \right)}_{=b_k} (z - z_\star)^k$$

On remarque que : $b_0 = \sum_{j=0}^n a_j \binom{j}{0} z_\star^j = p(z_\star)$ et $b_n = a_n \binom{n}{n} z_\star^{n-n} = a_n \neq 0$.

Soit $m = \arg \min_{1 \leq k \leq n} \{b_k \neq 0\}$. Alors,

$$p(z) = p(z_\star) + \sum_{k=m}^n b_k (z - z_\star)^k = p(z_\star) + b_m (z - z_\star)^m + \sum_{k=m+1}^n b_k (z - z_\star)^k.$$

En réécrivant $z - z_\star = re^{i\theta}$, on obtient

$$p(z) = p(z_\star) + b_m r^m e^{mi\theta}.$$

Or, on peut choisir θ (en choisissant le bon z) tel que $\frac{b_m}{|b_m|} e^{mi\theta} = -\frac{p(z_\star)}{|p(z_\star)|}$, car il s'agit d'un choix d'angle pour faire rotationner un vecteur unitaire du plan complexe pour qu'il devienne un autre vecteur unitaire du plan complexe (ce qui est toujours possible, et même unique modulo 2π). On a alors

$$\begin{aligned} p(z) &= p(z_\star) - r^m |b_m| \frac{p(z_\star)}{|p(z_\star)|} + \sum_{k=m+1}^n b_k (z - z_\star)^k \\ &= \frac{p(z_\star)}{|p(z_\star)|} \left(|p(z_\star)| - r^m |b_m| + \frac{|p(z_\star)|}{p(z_\star)} \sum_{k=m+1}^n b_k (z - z_\star)^k \right). \end{aligned}$$

On distingue maintenant deux cas :

- si $m = n$: $p(z) = \frac{p(z_\star)}{|p(z_\star)|} (|p(z_\star)| - r^n |b_n|)$ et si $0 < r \leq \sqrt[n]{\frac{|p(z_\star)|}{|b_n|}}$, $|p(z)| = ||p(z_\star)| - r^n |b_n|| < |p(z_\star)|$;
- sinon, $m < n$ et

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{p(z_\star)}{|p(z_\star)|} \left(|p(z_\star)| - r^m |b_m| + \frac{|p(z_\star)|}{p(z_\star)} \sum_{k=m+1}^n b_k (z - z_\star)^k \right) \\ &\leq \frac{p(z_\star)}{|p(z_\star)|} \left(|p(z_\star)| - r^m \left(|b_m| + \frac{|p(z_\star)|}{p(z_\star)} \sum_{k=m+1}^n |b_k| (z - z_\star)^{k-m} \right) \right) \end{aligned}$$

Posons $S := \sum_{k=m+1}^n |b_k| (z - z_\star)^{k-m}$.

Au pire des cas (pas atteint), si $0 < r < 1$,

$$|S| \leq \sum_{k=m+1}^n |b_k| |z - z_\star|^{k-m} = \sum_{k=m+1}^n |b_k| r^{k-m} \leq r \sum_{k=m+1}^n |b_k| =: rT.$$

Donc $|p(z)| \leq |p(z_\star)| - r^m |b_m| + r^{m+1} T$. Choisissons r tel que $rT \leq \frac{|b_m|}{2}$, donc $0 < r \leq \frac{|b_m|}{2T} := \frac{|b_m|}{2 \sum_{k=m+1}^n |b_k|}$. Alors,

$$|p(z)| \leq |p(z_\star)| - r^m |b_m| + \frac{1}{2} r^m |b_m| = |p(z_\star)| - \frac{1}{2} r^m |b_m| < |p(z_\star)|.$$

En conclusion, pour $0 < r < \min \left\{ 1, \frac{|b_m|}{2 \sum_{k=m+1}^n |b_k|}, \sqrt[m]{\frac{|p(z_\star)|}{\sum_{k=m+1}^n |b_k|}} \right\}$, on a $|p(z)| < |p(z_\star)|$. Ce qui entre en contradiction avec le fait que $|p(z_\star)|$ est le min, ainsi, on en conclut que $|p(z_\star)| = 0 \Rightarrow p(z_\star) = 0$. □

1.2 Fonctions Analytiques

1.2.1 Rappels dans \mathbb{R}

Définition 1.11 (Fonctions Analytiques). $f : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, U ouvert non vide, est dite *analytique* si $\forall x_0 \in U : \exists \delta > 0$ et $\{a_k\}_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k$.

Exemple 1.12. *Exemples de fonctions typiquement analytiques* : Les polynômes ; la fonction exponentielle ; les fonctions trigonométriques ; le logarithme ; etc.

Exemples de fonctions typiquement non analytiques : La valeur absolue ; les fonctions définies par morceaux ; la fonction conjuguée complexe ($z \mapsto \bar{z}$) ; etc.

Implication de l'Analyticité

Propriété 1.13. La convergence de $\sum_{k \geq 0} a_k(x-x_0)^k$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ implique $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(x-x_0)^k = 0$. Posons $\tilde{\delta} = |x-x_0|$, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|\tilde{\delta}^k = 0$. Comme $|a_j|\tilde{\delta}^k$ est borné, il existe une constante $C_{\tilde{\delta}} := \sup_{k \geq 0} |a_k|\tilde{\delta}^k < \infty$. Autrement dit, il existe une constante $C_{\tilde{\delta}} \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$|a_j| \leq C_{\tilde{\delta}} \tilde{\delta}^{-j}.$$

On a un contrôle géométrique de la croissance des a_j .

Proposition 1.14. Soit f analytique au voisinage de x_0 . Autrement dit, il existe $\delta > 0$ et des coefficients $a_k \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k(x-x_0)^k$ pour tout $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Alors, pour tout compact $K = [x_0-r, x_0+r] \subset (x_0-\delta, x_0+\delta)$ (i.e. $0 < r < \delta$), la série $\sum_{k \geq 0} a_k(x-x_0)^k$ converge absolument et uniformément sur K .

Démonstration. Pour la série $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$, posons $L := \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} \in [0, \infty]$, $R := \frac{1}{L}$. Alors la série converge absolument pour tout $|z| < R$ et diverge pour tout $|z| > R$.

Ici, on sait qu'elle converge pour tous $z = x-x_0$ vérifiant $|z| < \delta$, donc nécessairement, $R \geq \delta$. Fixons $0 < r < \delta \leq R$, et choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $r(L+\varepsilon) < 1$.

Par définition du limsup, il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $|a_k|^{1/k} \leq L + \varepsilon \Rightarrow |a_k| \leq (L + \varepsilon)^k$. Alors pour tout $k \geq k_0$, $|a_k|r^k \leq (r(L + \varepsilon))^k$, et $\sum_{k \geq k_0} (r(L + \varepsilon))^k$ est une série géométrique convergente puisque $r(L + \varepsilon) < 1$. En ajoutant le nombre fini des premiers termes, on obtient $\sum_{k \geq 0} |a_k|r^k < \infty$. Pour tout $x \in K = [x_0-r, x_0+r]$, on a $|x-x_0| \leq r$, donc $|a_k(x-x_0)^k| \leq |a_k|r^k$, $\forall k$. On en conclut que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} a_k(x-x_0)^k$ converge absolument et uniformément sur K . \square

Propriété 1.15. On peut différencier f formellement terme par terme un nombre arbitraire de fois, avec convergence absolue uniforme sur les sous-ensembles compacts. Autrement dit, l'analyticité implique C^∞ . Cependant, la réciproque est fautive.

En utilisant le fait que f soit C^∞ , on trouve que $f^{(k)}(x_0) = k!a_k$, d'où $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

1.2.2 Passage à \mathbb{C}

Définition 1.16 (Convergence Ponctuelle). $\sum_{k \geq 0} a_k(z-z_\star)^k$ converge ponctuellement en $z \in \mathbb{C}$ si $\{\sum_{k=0}^n a_k(z-z_\star)^k\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$ converge vers un $\alpha \in \mathbb{C}$.

Définition 1.17 (Convergence Absolue). $\sum_{k \geq 0} a_k(z-z_\star)^k$ converge absolument ponctuellement en $z \in \mathbb{C}$ si $\sum_{k \geq 0} |a_k||z-z_\star|^k$ converge ponctuellement en \mathbb{C} .

Définition 1.18 (Convergence Uniforme). $\sum_{k \geq 0} a_k(z-z_\star)^k$ converge uniformément sur $U \subseteq \mathbb{C}$ si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\exists N > 0, \text{ t.q. } \forall n \geq N, \forall z \in U : \left| \sum_{k \geq n} a_k(z-z_\star)^k \right| < \varepsilon.$$

Définition 1.19 (Convergence Absolue-Uniforme). $\sum_{k \geq 0} a_k(z-z_\star)^k$ converge absolument uniformément sur $U \subseteq \mathbb{C}$ si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\exists N > 0, \text{ t.q. } \forall n \geq N, \forall z \in U : \sum_{k \geq n} |a_k||z-z_\star|^k < \varepsilon.$$

Remarque 1.20. Comme dans \mathbb{R} , la convergence absolue implique la convergence.

1.2.3 Convergence Normale & Rayon de Convergence

Définition 1.21 (Convergence Normale). $\sum_{k \geq 0} f_k$ (avec $f_k : U \rightarrow \mathbb{C}$, U ouvert, des fonctions continues) converge normalement sur U si $\forall w \in U : \exists \varepsilon > 0$ tel que $\sum_{k \geq 0} \|f_k\|_{L^\infty(\overline{B(w, \varepsilon)})} < \infty$, où $\|f_k\|_{L^\infty(\overline{B(w, \varepsilon)})} = \max_{z \in \overline{B(w, \varepsilon)}} \{|f_k(z)|\}$.

Définition 1.22 (Rayon de Convergence). On définit le rayon de convergence d'une série $\sum_{k \geq 0} a_k(z - z_*)^k$ par

$$\rho := \sup\{r \in [0, \infty] : \sum_{k \geq 0} |a_k| r^k < +\infty\}$$

Lemme 1.23. Si une série entière a un rayon de convergence $\rho > 0$, alors elle converge normalement pour tout $z \in D(z_*, \rho)$ et diverge pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D(z_*, \rho)}$.

Remarque 1.24. On remarque que nous ne possédons aucune information quant à ce qui se passe sur $\partial D(z_*, \rho)$.

Démonstration. Par contradiction, supposons qu'il existe \tilde{z} tel que $f(\tilde{z})$ soit fini et $\sum_{k \geq 0} a_k(\tilde{z} - z_*)^k$ converge. On dénote $R = |\tilde{z} - z_*|$. Soit $r > 0$ arbitraire tel que $\rho < r < R$. On note $S_n = \sum_{k=0}^n a_k(z - z_*)^k$. Alors il existe un M tel que $|S_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$|a_n| r^n \leq |S_n - S_{n-1}| \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

Donc pour tout $z \in D(z_*, r)$, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \geq 0} a_k(z - z_*)^k \right| &\leq \sum_{k \geq 0} |a_k| r^k \leq |a_0| + \sum_{k \geq 1} |S_k - S_{k-1}| \left(\frac{r}{R}\right)^k \\ &\leq |a_0| + 2M \sum_{k \geq 1} \left(\frac{r}{R}\right)^k \leq 2M \frac{1}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)}. \end{aligned}$$

□

Lemme 1.25 (Lemme d'Abel). Soit $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ une série formelle. S'il existe $\rho > 0$ tel que

$$\sup_{k \geq 0} |a_k| \rho^k < +\infty,$$

alors la série $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ converge normalement sur $D(0, \rho)$.

Plus généralement, pour un centre $z_* \in \mathbb{C}$, si $\sup_{k \geq 0} |a_k| \rho^k < \infty$ alors $\sum_{k \geq 0} a_k(z - z_*)^k$ converge normalement sur $D(z_*, \rho)$.

Démonstration. Par hypothèse, $\exists M > 0$ tel que $|a_k| \rho^k \leq M$. Soit $\tilde{z} \in D(0, \rho)$ arbitraire. On note $r = |\tilde{z}|$ et $\varepsilon = \rho - r$. Soit $D_* = D(\tilde{z}, \varepsilon/4)$. Ainsi, pour tout $z \in D_*$, $\sum_{k \geq 0} |a_k| \|z\|_{L^\infty(D_*)}^k \leq \sum_{k \geq 0} |a_k| (r + \varepsilon/4)^k = \sum_{k \geq 0} (|a_k| \rho^k) \left(\frac{r + \varepsilon/4}{\rho}\right)^k \leq M \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon/4}{\rho}} < +\infty$. □

Proposition 1.26 (Convergence normale \Rightarrow convergence absolue uniforme sur les disques fermés). Soient $w \in U$ ouvert et $\varepsilon > 0$ tel que $\sum_{k \geq 0} \|a_k(z - z_*)^k\|_{L^\infty(\overline{B(w, \varepsilon)})} < \infty$. Alors $\exists N > 0$ tel que $\forall z \in \overline{B(w, \varepsilon)} : \sum_{k \geq N} |a_k| |z - z_*|^k < \varepsilon$.

Démonstration. On suppose que $\sum_{k \geq 0} a_k(z - z_*)^k$ converge normalement sur $\overline{B(w, \varepsilon)}$.

$$\sum_{k \geq 0} |a_k| |z - z_*|^k \leq \sum_{k \geq 0} \max_{z \in \overline{B(w, \varepsilon)}} \{|a_k| |z - z_*|^k\} = \sum_{k \geq 0} \|a_k(z - z_*)^k\|_{L^\infty(\overline{B(w, \varepsilon)})} < \infty.$$

□

Lemme 1.27 (Caractérisation de la convergence normale). $\sum_{k \geq 0} f_k$ (avec $f_k : U \rightarrow \mathbb{C}$, U ouvert, des fonctions continues) converge normalement sur U ssi $\forall K \subseteq U$ compact : $\sum_{k \geq 0} \|f_k\|_{L^\infty(K)} < \infty$.

Démonstration. " \Rightarrow " : soit $K \subseteq U$ compact. On sait que $\forall w \in K (\subseteq U) : \exists \varepsilon > 0$ tel que $\sum_{k \geq 0} \|f_k\|_{L^\infty(K)} < \infty$. On peut recouvrir grossièrement K par

$$\begin{aligned} K \subseteq \bigcup_{j=1}^n \overline{B(w_j, \varepsilon(w_j))} &\Rightarrow \sum_{k \geq 0} \|f_k\|_{L^\infty(K)} \leq \sum_{k \geq 0} \|f_k\|_{L^\infty(\bigcup_{j=1}^n \overline{B(w_j, \varepsilon(w_j))})} \\ &\leq \sum_{j=0}^n \sum_{k \geq 0} \|f_k\|_{L^\infty(\overline{D(w_j, \varepsilon(w_j))})} \\ &< ({}^n n \infty) = \infty. \end{aligned}$$

□

Lemme 1.28. — *Ratio test* : $\frac{1}{\rho} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$;

— *root test* : $\frac{1}{\rho} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$

Démonstration. — $\forall \varepsilon : \exists N \gg 1$ tel que $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < \left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon \right)$, $\forall k > N$. On veut montrer que ρ est le rayon de convergence. Considérons $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon \right) |z| < 1$. Ainsi,

$$\sum_{k > N} |a_k| |z|^k \leq |a_N| \sum_{k > N} \frac{\left[\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon \right) |z| \right]^k}{\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon \right)^N} = |a_N| \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon \right)^N} \sum_{k > N} \left[\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon \right) |z| \right]^k.$$

Comme $\left[\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon \right) |z| \right] < 1$, la somme converge.

Nous devons encore montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > \rho$, la série diverge. Soit $|z| > \rho$ arbitraire. Comme précédemment, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k > N, \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon \right) |a_k| < |a_{k+1}|$.

Ainsi, en prenant $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon \right) |z| > 1$, on a

$$\sum_{k > N} |a_k| |z|^k \geq \frac{|a_N|}{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon \right)^N} \sum_{k > N} \left[\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon \right) |z| \right]^k.$$

Comme $\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon \right) |z| > 1$, la série diverge.

— Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt[k]{|a_k|} < \left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon \right)$ pour tout $k > N$. Soit $|z| < \rho$ tel que $\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon \right) |z| < 1$. Alors,

$$\sum_{k > N} |a_k| |z|^k \leq \sum_{k > N} \left[\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon \right) |z| \right]^k.$$

La série converge. On montre à l'aide d'un argument similaire au premier point que pour tout $|z| > \rho$, on a que la série diverge.

□

Lemme 1.29. Soit $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ une série de puissances de rayon de convergence $\rho \in (0, +\infty]$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k \geq m} a_k \frac{k!}{(k-m)!} z^{k-m}$$

a aussi pour rayon de convergence ρ . On remarque de plus que le m -ième coefficient est donné par $a_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$.

Démonstration. Soit $m \in \mathbb{N}$, pour tout $k \geq m$,

$$\frac{\frac{(k+1)!}{(k+1-m)!}}{\frac{k!}{(k-m)!}} = \frac{k+1}{k+1-m} = 1 + \frac{m}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1. \quad (1.1)$$

Ainsi,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{|a_{k+1}| \frac{(k+1)!}{(k+1-m)!}}{|a_k| \frac{k!}{(k-m)!}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{1}{\rho}.$$

Ainsi, en supposant que la limite existe, $\sum_{k \geq m} a_k \frac{k!}{(k-m)!} z^{k-m}$ a le même rayon de convergence que $\sum_{k \geq 0} |a_k| z^k$. (sinon, on peut passer par le root test, ou encore une fois (1.1) tend vers 1.) \square

1.2.4 Analyticité & Recentrage

Proposition 1.30 (Recentrage). Soit $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_*)^k$ de rayon de convergence ρ . Soit $z' \in D(z_*, \rho)$, alors il existe une suite $\{b_\ell\}_{\ell \geq 0} \subseteq \mathbb{C}$ telle que

$$f(z) = \sum_{j \geq 0} b_\ell (z - z')^j < \infty, \quad \forall z \text{ t.q. } |z - z'| < \rho',$$

avec $\rho' = \rho - |z' - z_*|$.

Autrement dit, on peut "recentrer" la série autour de n'importe quel point à l'intérieur du disque de convergence, et le nouveau disque de convergence contient au minimum le disque centré en z' et de rayon $\rho - |z' - z_*|$.

Démonstration. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $z_* = 0$. Fixons $0 < r < \rho - |z'|$ et considérons z tel que $|z - z'| < r$. On remarque que $z^k = ((z - z') + z')^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (z - z')^j z'^{k-j}$. Posons pour $0 \leq j \leq k$,

$$c_{k,j}(z) := a_k \binom{k}{j} (z - z')^j z'^{k-j},$$

et $c_{k,j} := 0$ si $j > k$. Alors la double série est absolument convergente (uniformément en z tel que $|z - z'| < r$ car

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \sum_{j \geq 0} |c_{k,j}(z)| &= \sum_{k \geq 0} |a_k| \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} |z - z'|^j |z'|^{k-j} \leq \sum_{k \geq 0} |a_k| \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} r^j |z'|^{k-j} \\ &= \sum_{k \geq 0} |a_k| (r + |z'|)^k < \infty, \end{aligned}$$

puisque $r + |z'| < \rho$. Ainsi, nous pouvons échanger les sommes et réindexer via $\ell = k - j$:

Remarque 1.31. On remarque que la réindexation $\ell = k - j$ est une bijection entre $T = \{(k, j) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq j \leq k\}$ et \mathbb{N}^2 . On ne duplique et ne perd aucun terme dans la double somme.

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} a_k z^k &= \sum_{k \geq 0} a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (z - z')^j z'^{k-j} = \sum_{j \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} a_{j+\ell} \binom{j+\ell}{j} (z - z')^j z'^\ell \\ &= \sum_{j \geq 0} b_j (z - z')^j, \end{aligned}$$

où $b_j := \sum_{\ell \geq 0} a_{j+\ell} \binom{j+\ell}{j} z'^\ell$ (on remarque que b_j est bien défini, si pour un j la série divergeait, alors la double série ne pourrait pas converger, ce qui est une contradiction). Enfin, la série recentrée converge absolument pour $|z - z'| \leq r$:

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} |b_j| r^j &\leq \sum_{j \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} |a_{j+\ell}| \binom{j+\ell}{j} r^j |z'|^\ell = \sum_{k \geq 0} |a_k| \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} r^j |z'|^{k-j} \\ &= \sum_{a_k} (r + |z'|)^k < \infty. \end{aligned}$$

Comme $r < \rho - |z'|$ est arbitraire, on obtient la convergence absolue pour tout $|z - z'| < \rho - |z'|$ ce qui conclut la preuve. \square

Proposition 1.32. Soit $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_*)^k$, $z \in D(z_*, \rho)$, $\rho > 0$ (r.d.c.). $f(z)$ est continue sur $D(z_*, \rho)$ par convergence localement uniforme.

Démonstration. On sait qu'à l'intérieur du disque $D(z_*, \rho)$ la convergence est normale, par la proposition 1.26, on sait de plus que la convergence normale implique que pour tout sous-ensemble compact de $D(z_*, \rho)$, la convergence est absolue uniforme.

Soit $\varepsilon > 0$, $z \in D(z_*, \rho)$. On pose

$$K := \arg \max\{\text{diag}(K) : K \subset D(z_*, \rho) \text{ compact}, z \in K\}.$$

$\sum_{k \geq 0} a_k (z - z_*)^k$ converge absolu-uniformément sur K . Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z, z' \in K$,

$$\begin{aligned} |f(z) - \sum_{k=0}^N a_k (z - z_*)^k| &\leq \frac{\varepsilon}{3} \\ |f(z') - \sum_{k=0}^N a_k (z' - z_*)^k| &\leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Comme le polynôme $\sum_{k=0}^N a_k (z - z_*)^k$ est continu sur K , il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $|z - z'| < \delta$,

$$\left| \sum_{k=0}^N a_k (z - z_*)^k - \sum_{k=0}^N a_k (z' - z_*)^k \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

On choisit δ tel que l'inégalité ci-dessus est valable et, quitte à le réduire, tel que si $|z' - z| < \delta$, $z' \in K$. Ainsi, pour tout $z' \in D(z_*, \rho)$ tel que $|z' - z| < \delta$,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z')| &= \left| f(z) - \sum_{k=0}^N a_k (z - z_*)^k + \sum_{k=0}^N a_k (z - z_*)^k - \sum_{k=0}^N a_k (z' - z_*)^k - f(z') + \sum_{k=0}^N a_k (z' - z_*)^k \right| \\ &\leq \left| f(z) - \sum_{k=0}^N a_k (z - z_*)^k \right| + \left| \sum_{k=0}^N a_k (z - z_*)^k - \sum_{k=0}^N a_k (z' - z_*)^k \right| + \left| f(z') - \sum_{k=0}^N a_k (z' - z_*)^k \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

En particulier, sur tout sous-compact la fonction est uniformément continue.

Proposition 1.33. Soit $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_*)^k$, $z \in D(z_*, \rho)$ où ρ est le rayon de convergence. Il existe un $\rho \geq \delta > 0$ tel que $f|_{D(z_*, \delta) \setminus \{z_*\}} \neq 0$ pourvu que $\{a_k\}_{k \geq 0} \not\equiv \{0\}$.

Autrement dit, si f n'est pas la fonction nulle, alors il existe un petit disque percé autour de z_* dans lequel f n'a aucune racine. Les zéros d'une fonction analytique sont isolés (et s'ils s'accumulent à un point intérieur, la fonction est identiquement nulle).

Démonstration. Soit $k' = \arg \min\{a_k \neq 0\}$.

$$\begin{aligned} f(z) &= a_{k'} (z - z_*)^{k'} + \sum_{\ell > k'} a_\ell (z - z_*)^\ell \\ &= (z - z_*)^{k'} \left[a_{k'} + (z - z_*) \sum_{\ell > k'} a_\ell (z - z_*)^{\ell - k' - 1} \right] \end{aligned}$$

Si $z \in D(z_*, \rho)$, la somme $\sum_{\ell > k'} a_\ell (z - z_*)^{\ell - k' - 1}$ converge localement uniformément et donc vers une fonction continue $g(z)$. En particulier, par continuité de $g(z)$ en z_* , on peut choisir un $\delta > 0$ suffisamment petit tel que $|(z - z_*)g(z)| < \frac{|a_{k'}|}{2}$, pour tout $z \in D(z_*, \delta)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| (z - z_*)^{k'} [a_{k'} + (z - z_*)g(z)] \right| \\ &\geq |z - z_*|^{k'} \cdot [|a_{k'}| - |(z - z_*)g(z)|] \\ &\geq |z - z_*|^{k'} \cdot \left[|a_{k'}| - \frac{|a_{k'}|}{2} \right] \geq 0 \end{aligned}$$

et > 0 pourvu que $z \in D(z_*, \delta) \setminus \{0\}$. □

Si il y avait une suite de zéros $\{z_n\}_{n \geq 0} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} z_0$, alors on obtiendrait une contradiction dans la dernière étape de la preuve. Ainsi, on conclurait que la suite $\{a_k\}_{k \geq 0}$ est la suite nulle et donc que f est identiquement nulle sur $D(z_*, \rho)$.

Proposition 1.34. Soient $\sum_{k \geq 0} a_k (z - z_*)^k$, $\sum_{\ell \geq 0} b_\ell (z - z_*)^\ell$ deux séries de puissances qui convergent sur $D(z_*, \delta)$, $\delta > 0$ et telles que $\sum_{k \geq 0} a_k (z - z_*)^k = \sum_{\ell \geq 0} b_\ell (z - z_*)^\ell$ sur $D(z_*, \rho)$. Alors $a_k = b_k$, $\forall k \geq 0$.

Démonstration. Posons $g(z) = \sum_{k \geq 0} (a_k - b_k) (z - z_*)^k$. La série converge sur $D(z_*, \delta)$ et, par hypothèse, $g(z) = 0$ pour tout $z \in D(z_*, \rho)$.

Supposons par l'absurde qu'il existe un indice où les coefficients diffèrent et notons $m = \min\{k \geq 0 : a_k \neq b_k\}$. On peut alors factoriser $g(z) = (z - z_*)^m h(z)$, $h(z) = (a_m - b_m) + \sum_{j \geq 1} (a_{m+j} - b_{m+j}) (z - z_*)^j$.

La série définissant h converge dans $D(z_*, \delta)$; en particulier h est continue et $h(z_*) = a_m - b_m \neq 0$. Il existe donc $r \in (0, \rho)$ tel que $h(z) \neq 0$ pour $|z - z_*| < r$. Pour $0 < |z - z_*| < r$, on a alors $g(z) \neq 0$, contradiction avec $g \equiv 0$ sur $D(z_*, \rho)$.

Ainsi, un tel m n'existe pas et l'on doit avoir $a_k = b_k$ pour tout $k \geq 0$. □

1.3 Topologie de \mathbb{C}

Rappel : soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine (i.e. ouvert connexe), alors U est connexe par arc.

Définition 1.35 (Connexité). On dit que U est connexe, pourvu qu'on ne puisse pas écrire $U = A \cup B$, où A et B sont disjoints, ouverts, et non vides.

Définition 1.36 (Point d'accumulation). Pour tout $U \subseteq \mathbb{C}$, on appelle $z_* \in U$ un point d'accumulation de Σ , pourvu que $\forall \delta > 0, \exists z_\delta \in (D(z_*, \delta) \cap \Sigma) \setminus \{z_*\}$.

Exemple 1.37. $U = D(0, 1), \Sigma = \{\frac{1}{n}, n \geq 2\}$, 0 est un point d'accumulation

$U = D(0, 1), \Sigma = \{1 - \frac{1}{n}, n \geq 2\}$, ici on n'a pas de point d'accumulation dans U (ça devrait être 1 mais 1 n'est pas dans le disque D .)

Théorème 1.38. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine. Soient $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytiques. Supposons que $\Sigma = \{z \in U \mid f(z) = g(z)\}$ a un point d'accumulation $p \in U$. Alors $f(z) = g(z), \forall z \in U$.

Démonstration. Pour commencer, on voit que la fonction $(f - g)(z)$ est une différence de 2 fonctions analytiques, elle est alors elle-même analytique et admet une expansion en série de puissances autour de p . C'est-à-dire qu'il existe $\delta > 0$ et $\{a_n\}_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{C}$ tels que $(f - g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - p)^n$ pour tout $z \in D(p, \delta)$.

Par hypothèse, il existe une suite $\{p_n\}_{n \geq 1} \subset D(p, \delta)$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ et $(f - g)(p_n) = 0$. D'après la proposition 1.34, ceci entraîne que $a_n = 0, \forall n \geq 0$, alors, $(f - g)(z) = 0, \forall z \in D(p, \delta)$ ssi la différence $f - g$ est zéro autour de p . On veut alors montrer que cette différence reste nulle autour de n'importe quel point $q \in U$.

Soit $q \in U$. Comme U est un domaine, il est en particulier connexe par arcs, c'est-à-dire qu'il existe un chemin continu γ qui lie p à q . On peut alors décrire la fonction suivante $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ continue, telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$.

On définit alors l'ensemble $\mathcal{A} = \{t \in [0, 1] : (f - g)(z) \text{ est } 0 \text{ autour de } \gamma(t)\}$. On sait d'ores et déjà que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ car $0 \in \mathcal{A}$. On cherche alors à montrer que $\mathcal{A} = [0, 1]$. Pour ce faire, on montre que \mathcal{A} est ouvert et fermé (par rapport à l'ensemble $[0, 1]$) ce qui entraîne que $\mathcal{A} = [0, 1]$ car $[0, 1]$ est connexe.

- \mathcal{A} est ouvert : Soit $t \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire qu'il existe $\rho > 0$ tel que $(f - g)(z) = 0$ pour tout $z \in D(\gamma(t), \rho)$. Comme γ est continue, si on choisit \tilde{t} suffisamment proche de t , on a $\gamma(\tilde{t}) \in D(\gamma(t), \rho)$ donc $\tilde{t} \in \mathcal{A}$. Ceci prouve que \mathcal{A} est ouvert
- \mathcal{A} est fermé : Soit la suite $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_* \in [0, 1]$. On sait que $(f - g)(\gamma(t_n)) = 0, \forall n \geq 1$. Par continuité de γ , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n) = \gamma(t_*)$. Mais ceci implique qu'un ensemble de zéros de $f - g$ s'accumule autour de $\gamma(t_*)$. Donc, par le même argument qu'au départ, on a ici que $(f - g)(z) = 0$ autour de $\gamma(t_*)$, alors, par construction, $t_* \in \mathcal{A}$ donc \mathcal{A} est fermé.

Les 2 seuls ensembles ouverts et fermés par rapport à $[0, 1]$ sont l'ensemble vide et $[0, 1]$ lui-même, or, nous avons déjà conclu que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, alors nécessairement, $\mathcal{A} = [0, 1]$. \square

1.3.1 Fonctions analytiques spéciales

Dans cette section, on va s'intéresser principalement aux fonctions liées à l'exponentielle.

On sait que $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ a comme rayon de convergence $\rho = +\infty$ donc qu'elle converge normalement absolument, localement uniformément sur tout \mathbb{C} . Une autre définition pour cette fonction est $e^t = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{t}{n})^n$

Proposition 1.39. $\forall z, w \in \mathbb{C}$, nous avons que $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

Démonstration. Comme $\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{w^m}{m!}$ converge absolument pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, il s'ensuit que

$$\sum_{m,n} \frac{z^n}{n!} \frac{w^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{m,n \geq 0 \\ m+n=k}} \frac{z^n}{n!} \frac{w^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{k! \sum_{\substack{m,n \geq 0 \\ m+n=k}} \frac{z^n}{n!} \frac{w^m}{m!}}_{(z+w)^k} = e^{z+w}$$

En effet, on remarque que $(z+w)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} z^j w^{k-j}$, en faisant le changement de variable suivant : $k-j \leftrightarrow m$, on a une bijection $(k, k-j) \leftrightarrow (n, m)$ où $n+m = k$. Ainsi, $\sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} z^j w^{k-j} = \sum_{\substack{m,n \geq 0 \\ n+m=k}} k! \frac{z^n}{n!} \frac{w^m}{m!}$. \square

Corollaire 1.40. Si $z = it$ pour $t \in \mathbb{R}$, on a que $|e^z| = |e^{it}| = 1$

Démonstration. Commençons par remarquer que si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \geq 0$ convergent sur $D(0, \delta)$ pour $\delta > 0$, alors $\overline{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{z^n} = f(\overline{z})$. On peut alors écrire $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

En particulier, avec $z = it$ pour $t \in \mathbb{R}$, on a $\overline{z} = -it = -z$ d'où $|e^{it}| = e^{it} \cdot \overline{e^{it}} = e^{it} \cdot e^{-it} = e^0 = 1$ \square

Remarque 1.41. Une preuve alternative aurait été de passer par la forme trigonométrique de l'exponentielle; cependant, cette preuve serait moins rigoureuse au sens de la théorie des ensembles.

Définition 1.42 (Définition générale de $\sin(z)$, $\cos(z)$). Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit

$$\cos(z) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^{2l}}{(2l)!} (-1)^l = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \text{ et}$$

$$\sin(z) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^{2l+1}}{(2l+1)!} (-1)^l = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Pour lesquelles on a convergence normale, absolue, localement uniforme sur tout \mathbb{C}

Définition 1.43 (Fonctions hyperboliques). On définit à présent les fonctions hyperboliques $\cosh(z)$, $\sinh(z)$ comme

$$\cosh(z) := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \text{ et } \sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

Proposition 1.44. On a le rapport suivant pour tout $z \in \mathbb{C}$ $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$

Démonstration. $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = \frac{1}{4}(e^{2z} + 2 + e^{-2z} - e^{2z} + 2 - e^{-2z})$ \square

1.3.2 Périodicité de e^z

Pour $e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$, on se restreint à l'étude du cas $t \in \mathbb{R}$ pour l'instant. On peut voir directement que, si $t = 2\pi$, alors $\cos(2\pi) = 1$, $\sin(2\pi) = 0$ et $e^{2\pi i} = 1$.

Cependant, cette périodicité se base sur un argument de compréhension géométrique, on cherche à trouver comment se baser exclusivement sur les séries de puissances et ainsi chercher d'autres périodicités.

On décide de ne pas utiliser l'interprétation géométrique de π , que l'on va introduire dans une nouvelle définition formelle.

Pour cette dernière, on va s'intéresser à la fonction $\cos(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^{2\ell}}{(2\ell)!} (-1)^\ell$. En effet, on peut montrer, par calcul direct, que $\cos(0) = 1$ et $\cos(2) < 0$, comme cette fonction est continue, et par le théorème des valeurs intermédiaires, on sait qu'il existe $t_0 \in [0, 2]$ tel que $\cos(t_0) = 0$.

Cette observation nous donne la définition formelle suivante.

Définition 1.45. En reprenant les notations ci-dessus, on choisit $t_0 = \arg \min_{t \in [0, 2]} \{\cos(t) = 0\}$ et on pose $t_0 =: \frac{\pi}{2}$

On peut maintenant s'intéresser aux périodes de la fonction exponentielle dans un cadre plus formel.

On commence par montrer un lemme qui nous sera utile plus tard.

Lemme 1.46. Soit $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$, une période de e^z , on a alors que $a = 0$ et $\alpha \in i\mathbb{R}$

Démonstration. Si $e^\alpha = 1$ on a $e^a \cdot e^{ib} = 1$ d'où $e^a \cdot |e^{ib}| = e^a = 1$ d'où $a = 0$ \square

Proposition 1.47. Les périodes de la fonction e^z sont exactement les éléments de $\{2\pi i \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Donc $e^r = 1$ implique $r \in \{2\pi i \cdot k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. En particulier, $\pm 2\pi i$ sont les périodes non triviales minimales de e^z .

Démonstration. En reprenant la définition de t_0 donnée plus haut, on peut écrire $e^{it_0} = \cos(t_0) + i \cdot \sin(t_0) = 0 + i \cdot \sin(t_0)$ on vérifie directement que $\cos^2(t_0) + \sin^2(t_0) = |e^{it_0}| = 1$ donc $\sin(t_0) = \pm 1$. Or, comme $(\sin(t))' = \cos(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec $\sin(0) = 0$ et $\cos(t) > 0$ pour $t \in (0, t_0)$, on a que $(\sin(t))' > 0$ sur $(0, t_0)$ alors $\sin(t) > 0$ pour $t \in (0, t_0)$.

On peut en déduire l'identité d'Euler $e^{it_0} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ d'où $(e^{i\frac{\pi}{2}})^2 = -1$ (donc $e^{i\pi} + 1 = 0$) et finalement $e^{2\pi i} = (-1)^2 = 1$ d'où $e^{2\pi i \cdot h} = 1$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$

Supposons maintenant par absurde qu'il existe une période $r \in i\mathbb{R} \setminus \{2\pi i k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Comme la différence de 2 périodes est une période, on peut réduire à une période $r \in i\mathbb{R}$ (on sait qu'il s'agit d'un nombre complexe grâce au lemme 1.46). On écrit $r = i\zeta$ avec $\zeta \in (0, 2\pi)$.

Si on s'intéresse à la valeur $\frac{\zeta}{4} \in (0, \frac{\pi}{2})$, on a que $e^{i\zeta/4} = \underbrace{\cos(\frac{\zeta}{4})}_u + i \cdot \underbrace{\sin(\frac{\zeta}{4})}_v$

Avec l'hypothèse $e^{i\zeta} = 1 = (e^{i\zeta/4})^4 = (u + iv)^4 = u^4 - 6u^2v^2 + v^4 + i4uv(u^2 - v^2)$. Comme $e^{i\zeta} = 1$, la partie imaginaire est nulle, alors $i4uv(u^2 - v^2) = 0$, et on trouve que $u^2 = v^2$.

De cette relation, on trouve $u^2 + v^2 = \cos^2(\frac{\zeta}{4}) + \sin^2(\frac{\zeta}{4}) = 1$ d'où $u^2 = v^2 = \frac{1}{2}$, on peut alors résoudre $e^{i\zeta} = u^2 - 6v^2u^2 + v^4 = \frac{1}{4} - \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = -1$ ce qui est une contradiction. \square

Proposition 1.48. L'application $z \mapsto e^z$ est surjective de \mathbb{C} en \mathbb{C}^* mais loin d'être injective.

Démonstration. On veut montrer que pour tout $w \in \mathbb{C}^*$, il existe un $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z = w$. Pour tout réel t , $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$ appartient au cercle unité S^1 . Réciproquement, tout point $u \in S^1$ s'écrit $u = e^{it}$ pour un certain t . Si $r > 0$, alors on peut écrire $r = e^{\log r}$. Tout $w \in \mathbb{C}^*$ s'écrit de manière unique comme $w = |w| \cdot \frac{w}{|w|} = r \cdot u$, avec $r = |w| > 0$ et $u \in S^1$. Comme $u = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$ et $r = e^{\log r}$, on obtient

$$w = ru = e^{\log r} e^{it} = e^{\log r + it}.$$

En prenant $z = \ln |w| + it$, où t est un argument de w , on a bien que $e^z = w$. On a donc démontré la surjectivité de e^z de \mathbb{C} vers \mathbb{C}^* . \square

Remarque 1.49. On voit que pour tout $z \in \{\ln |w| + it : t \in \{\arg(w) + 2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}\}$, $e^z = w$, ce qui contredit la thèse de l'injectivité.

Définition 1.50. Soit $U \subseteq \mathbb{C}^*$ un domaine. Alors une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est appelée *logarithme complexe*, pourvu que

$$e^{f(z)} = z \tag{1.2}$$

Remarque 1.51. Soit $U = \mathbb{C}^*$, existe-t-il une fonction continue $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que 1.2 soit vraie?

Proposition 1.52. Il n'existe aucune application continue $\log : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$e^{\log z} = z, \quad \forall z \in U.$$

Démonstration. Idée : on considère une courbe fermée autour de l'origine et on étudie l'évolution de $f(z)$ autour de celle-ci. Intuitivement, lorsque l'on arrive à la fin de la boucle (i.e. on est à nouveau au départ de cette dernière), la valeur de $f(z)$ doit être décalée de $2\pi i$ par rapport à son point de départ. Or, le point final est identique au point initial. Donc pour que 1.2 tienne, il faut que $z = z + 2\pi i$, ce qui est une contradiction.

Formellement : Supposons par l'absurde qu'il existe une telle fonction f continue de \mathbb{C}^* vers \mathbb{C} satisfaisant (1.2). Restreignons-nous à S^1 , $z = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$. Par hypothèse,

$$e^{f(e^{it})} = e^{it} \implies e^{f(e^{it})-it} = 1.$$

Par la proposition 1.47, on sait que $f(e^{it}) - it = 2\pi in(t)$, où $n(t) \in \mathbb{Z}$ qui dépend, à priori, de t . Or, comme f est supposée continue, l'application $t \mapsto f(e^{it}) - it$ est aussi une fonction continue. On sait de plus que l'image d'un ensemble connexe (ici \mathbb{R}) par une fonction continue est aussi connexe, cependant, l'image de cette application est l'ensemble discret $2\pi i\mathbb{Z}$. Les sous-ensembles connexes de cet ensemble sont forcément des singletons, on en déduit que la fonction $t \mapsto f(e^{it}) - it$ est à valeur constante. Autrement dit, n ne dépend pas de t dans la définition $f(e^{it}) - it = 2\pi in$.

Considérons les temps $t = 0$ et $t = 2\pi$. On a que $f(e^0) = 2\pi in$ et $f(e^{2\pi i}) = 2\pi i + 2\pi in$, donc

$$f(1) = 2\pi in = 2\pi i(n + 1)$$

Ce qui est une contradiction. On en déduit qu'il n'existe pas de logarithme complexe continu sur \mathbb{C}^* . \square

Remarque 1.53. On verra plus tard que les 3 propriétés suivantes sont équivalentes

- $U \subseteq \mathbb{C}^*$ est simplement connexe
- Toute courbe fermée peut être contractée continûment dans U à un point
- Des logarithmes continus existent

Exemple 1.54. Par exemple, si on se donne $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-\}$, on verra qu'on peut définir une telle fonction

Chapitre 2

Fonctions Holomorphes

Remarque 2.1. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. On se rappelle que l'on peut exprimer tout $z \in \mathbb{C}$ comme un vecteur de \mathbb{R}^2 par l'isomorphisme \mathbb{R} -linéaire $\Phi : \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, $x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Φ induit donc un isomorphisme \mathbb{R} -linéaire entre les fonctions complexes et les applications de \mathbb{R}^2 : $\Psi : \mathcal{F}(U, \mathbb{C}) \simeq \mathcal{F}(\tilde{U}, \mathbb{R}^2)$, où $\tilde{U} = \Phi(U)$, donné par

$$\forall f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{C}), \Psi(f) = \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}, \Psi(f)(x, y) = \Phi(f(x + iy)) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \tilde{U}.$$

On a de la même manière un isomorphisme entre $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\tilde{U}, \mathbb{R})$.

On remarque en plus que $|z| = \|(x, y)\|$ via Φ , ce qui va nous servir dans la preuve de la proposition suivante.

On peut caractériser les fonctions holomorphes de différentes manières, toutes équivalentes aux autres.

Proposition 2.2 (Caractérisations de l'holomorphicité). *Soit $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $z_* \in U$. Dans la suite, on note $f(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy)$, où $u, v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Pour des questions de lisibilité, lorsque l'on considérera f comme application de \mathbb{R}^2 , donc $\Psi(f)$, on notera l'image par $\tilde{f} = (u(x + iy), v(x + iy)) = (\tilde{u}(x, y), \tilde{v}(x, y))$.*

Les quatre propriétés suivantes sont toutes équivalentes. Si une, et donc toutes, est satisfaite, on dit que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe en $z_ = x_* + iy_* \in U$, $(x_*, y_*) \in \tilde{U}$.*

(i) $\tilde{f} = (\tilde{u}, \tilde{v})$ est différentiable en (x_*, y_*) . La matrice Jacobienne de \tilde{f} est donnée par

$$D\tilde{f}(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Donc $D\tilde{f}(x_*, y_*)$ préserve les angles et la direction (similitude directe).

(ii) La limite $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}^*}} \frac{f(z_* + h) - f(z_*)}{h} =: f'(z_*)$ existe.

(iii) L'application \tilde{f} est différentiable en (x_*, y_*) , et on a les équations de Cauchy-Riemann :

$$\tilde{u}_x = \tilde{v}_y, \quad \tilde{u}_y = -\tilde{v}_x, \quad \text{en } (x_*, y_*). \quad (2.1)$$

où $\tilde{u}_i = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial i}$ et $\tilde{v}_i = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial i}$ pour $i = x, y$. (Donc $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$ en z_* .)

(iv) \tilde{f} est différentiable en (x_*, y_*) au sens de \mathbb{R}^2 . On a l'égalité

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{f(z_* + h) - f(z_*)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{f(z_* + ih) - f(z_*)}{ih}.$$

Autrement dit en appliquant Φ à gauche et à droite,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{\tilde{f}(x_* + h, y_*) - \tilde{f}(x_*, y_*)}{h} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{\tilde{f}(x_*, y_* + h) - \tilde{f}(x_*, y_*)}{h}.$$

Démonstration. On va démontrer les équivalences en montrant la chaîne d'implication (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i).

- (i) \Rightarrow (ii) : Par hypothèse, \tilde{f} est différentiable en (x_*, y_*) . Ainsi, on peut écrire $\tilde{f}(x, y) = \tilde{f}(x_*, y_*) + D\tilde{f}(x_*, y_*) \begin{pmatrix} x - x_* \\ y - y_* \end{pmatrix} + o(\|(x - x_*, y - y_*)\|)$. Comme $D\tilde{f}(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, l'application $h \mapsto D\tilde{f}(x_*, y_*) \cdot h$ correspond via Ψ^{-1} à la multiplication par $a + ib = \ell \in \mathbb{C}$. Ainsi,

$$\Psi^{-1} \left(D\tilde{f}(x_*, y_*) \begin{pmatrix} x - x_* \\ y - y_* \end{pmatrix} \right) = \ell(x - x_* + i(y - y_*)).$$

On peut donc réécrire $f(z) = f(z_*) + \ell(z - z_*) + o(\|z - z_*\|)$, ce qui implique pour tout $z \neq z_*$,

$$\frac{f(z) - f(z_*)}{z - z_*} = \ell + \frac{o(\|z - z_*\|)}{\|z - z_*\|}.$$

Enfin, pour $z = z_* + h$, $h \in \mathbb{C}^*$, on voit que $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}^*}} \frac{f(z_* + h) - f(z_*)}{h}$ existe et vaut $\ell \in \mathbb{C}$.

- (ii) \Rightarrow (iii) : L'hypothèse de (ii) implique que l'on peut écrire $f(z) = f(z_*) + f'(z_*) \cdot h + o(\|h\|)$. Donc par isomorphisme, \tilde{f} différentiable en (x_*, y_*) . Pour $h = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\Psi(f)(z_* + h) = \tilde{f}((x_*, y_*) + (x, y)) = \tilde{f}((x_*, y_*)) + \Psi(f'(z_*) \cdot h) + o(\|(x, y)\|).$$

Donc l'expression $h \mapsto f'(z_*) \cdot h$ peut être interprétée comme une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , qui est \mathbb{R} -linéaire. Ceci implique la différentiabilité au sens de \mathbb{R}^2 . Si $f'(z_*) = a + ib$, $h = x + iy$, on a $f'(z_*) \cdot h = (a + ib) \cdot (x + iy) = (ax - by) + i(ay + bx)$, ce qui correspond par isomorphisme à

$$\Psi(f'(z_*) \cdot h) = \Psi((ax - by) + i(ay + bx)) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

On en déduit la Jacobienne de \tilde{f} :

$$D\tilde{f}(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \implies \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}. \quad (2.2)$$

- (iii) \Rightarrow (iv) : On suppose que \tilde{f} est différentiable en (x_*, y_*) et 2.2 est satisfaite. Donc

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{\tilde{f}(x_* + h, y_*) - \tilde{f}(x_*, y_*)}{h} = \begin{pmatrix} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{\tilde{u}(x_* + h, y_*) - \tilde{u}(x_*, y_*)}{h} \\ \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{\tilde{v}(x_* + h, y_*) - \tilde{v}(x_*, y_*)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_x(x_*, y_*) \\ \tilde{v}_x(x_*, y_*) \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

On a de plus

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{\tilde{f}(x_*, y_* + h) - \tilde{f}(x_*, y_*)}{h} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_y(x_*, y_*) \\ \tilde{v}_y(x_*, y_*) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Par l'hypothèse du (iii), on a que $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$, donc par isomorphisme entre $\mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on a que $\tilde{u}_x = \tilde{v}_y$ et $\tilde{u}_y = -\tilde{v}_x$. Ainsi, on a que $\begin{pmatrix} \tilde{u}_x(x_*, y_*) \\ -\tilde{u}_y(x_*, y_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_y(x_*, y_*) \\ \tilde{v}_y(x_*, y_*) \end{pmatrix}$. Par 2.3 et 2.4, on déduit l'égalité suivante :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{\tilde{f}(x_* + h, y_*) - \tilde{f}(x_*, y_*)}{h} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{\tilde{f}(x_*, y_* + h) - \tilde{f}(x_*, y_*)}{h}.$$

— (iv) \Rightarrow (i) : \tilde{f} est différentiable en (x_*, y_*) et les deux limites 2.3, 2.4 sont égales. Notons $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$. Par différentiabilité,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{\tilde{f}(x_* + h, y_*) - \tilde{f}(x_*, y_*)}{h} = D\tilde{f}(x_*, y_*)e_1,$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{\tilde{f}(x_*, y_* + h) - \tilde{f}(x_*, y_*)}{h} = D\tilde{f}(x_*, y_*)e_2$$

On a donc que $D\tilde{f}(x_*, y_*)e_1 = JD\tilde{f}(x_*, y_*)e_2$ par l'hypothèse du (iv), avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $D\tilde{f}(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. L'égalité ci-dessus nous donne que $(\alpha, \gamma) = (\delta, -\beta)$, donc que $\alpha = \delta$ et $\gamma = -\beta$. Autrement dit,

$$D\tilde{f}(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $D\tilde{f}(x_*, y_*)$ est une similitude directe. □

Définition 2.3. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, où U est un domaine. Alors on dit que f est holomorphe pourvu que $\tilde{f} \in C^1(\tilde{U}, \mathbb{R}^2)$ (de manière équivalente, $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont C^1 au sens réel) et que f est holomorphe en tout $p \in U$.

Exemple 2.4. Pour $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, les fonctions $z \mapsto z^k$ sont holomorphes. C'est parce que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^k - z^k}{h} = k \cdot z^{k-1}$.

En particulier, ceci implique que tout polynôme dans \mathbb{C} est holomorphe.

Lemme 2.5. Les fonctions holomorphes forment un espace vectoriel sur \mathbb{C} . Si f, g sont holomorphes sur un domaine $U \subseteq \mathbb{C}$, alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a que $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ est aussi holomorphe

Démonstration. On peut prouver cela directement en utilisant le deuxième critère d'holomorphie. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$, un domaine et soient $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphes et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on peut écrire directement pour tout $z \in U$:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}^*}} \frac{(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(z+h) - (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(z)}{h} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}^*}} \frac{\alpha \cdot f(z+h) + \beta \cdot g(z+h) - \alpha \cdot f(z) - \beta \cdot g(z)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}^*}} \frac{\alpha \cdot f(z+h) - \alpha \cdot f(z)}{h} + \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}^*}} \frac{\beta \cdot g(z+h) - \beta \cdot g(z)}{h} \\ &= \alpha \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}^*}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} + \beta \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}^*}} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} \end{aligned}$$

Et on sait que les deux dernières limites existent car f, g sont holomorphes. Ceci implique directement que la fonction $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)$ est holomorphe en U . □

Proposition 2.6. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$, un domaine et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, analytique, alors, f est holomorphe en tout $p \in U$.

Démonstration. Nous allons vérifier le deuxième critère d'holomorphisme, c'est-à-dire, on vérifie que $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{C}}} \frac{f(p+z) - f(p)}{z} =: f'(p)$ existe pour tout p dans U .

On se donne alors $p \in U$, il existe $\delta > 0$ et $\{a_n\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$ tels que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$ pour

tout $z \in D(p, \delta)$. Sans perte de généralité, on pose $p = 0$ puis on vérifie que $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{C}}} f(z)$ existe. On a directement que $f(0) = a_0$ et, pour $z \neq 0$, on écrit

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} = \frac{\sum_{n \geq 0} a_n z^n - a_0}{z} = \frac{\sum_{n \geq 1} a_n z^n}{z} = \sum_{n \geq 1} a_n z^{n-1} = a_1 + \sum_{n \geq 2} a_n z^{n-1}$$

Sachant que $\sum_{n \geq 2} a_n z^{n-1}$ converge pour $z \in D(0, \delta)$.

On a alors directement que $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{C}}} z \cdot \sum_{n \geq 2} a_n z^{n-2} = 0$ alors, $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{C}}} \frac{f(z) - f(0)}{z} = a_1$ existe \square

Proposition 2.7. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, une série de puissances qui converge dans $D(0, \rho)$ avec $\rho > 0$. Alors, on peut définir $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $f(z)$ est holomorphe sur $D(0, \rho)$.

De plus, on a que $f'(z) = \sum_{n \geq 1} a_n n z^{n-1}$

Démonstration. Soit $z \in D(0, \rho)$, on considère $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ avec $\rho - |z| > |h|^{1/3} > 0$. On considère le rapport suivant :

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{\sum_{n \geq 0} a_n [(z+h)^n - z^n]}{h} = \frac{\sum_{n \geq 0} a_n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^k z^{n-k}}{h} \\ &= \sum_{n \geq 0} a_n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^{k-1} z^{n-k} = \sum_{n \geq 0} a_n n z^{n-1} + \sum_{n \geq 0} a_n \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-1} z^{n-k} \\ &= \sum_{n \geq 0} a_n n z^{n-1} + h \cdot \sum_{n \geq 0} a_n \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-2} z^{n-k} \end{aligned}$$

On cherche alors à montrer que la somme de droite converge et que, pour $|h|$ suffisamment petit, $h \cdot \sum_{n \geq 0} a_n \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-2} z^{n-k} \rightarrow 0$. On cherche alors à borner les termes suivants

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-2} z^{n-k} &= \binom{n}{2} z^{n-2} + \binom{n}{3} h z^{n-3} + \binom{n}{4} h^2 z^{n-4} + \dots + h^{n-2} \\ &\leq \binom{n}{2} |z|^{n-2} + \binom{n}{3} |h| \cdot |z|^{n-3} + \binom{n}{4} |h|^2 \cdot |z|^{n-4} + \dots + |h|^{n-2} \\ &\leq \binom{n}{2} |z|^{n-2} + \binom{n}{3} (|h|^{1/3})^3 |z|^{n-3} + \binom{n}{4} (|h|^{1/4})^4 |z|^{n-4} + \dots + (|h|^{1/n})^n \\ &\leq \binom{n}{2} |z|^{n-2} + (|z| + |h|^{1/3})^n \end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$\left| \sum_{n \geq 0} a_n \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-2} z^{n-k} \right| \leq \sum_{n \geq 0} |a_n| \left[\binom{n}{2} |z|^{n-2} + (|z| + |h|^{1/3})^n \right]$$

Comme nous avons posé $|z| + |h|^{1/3} < \rho$, alors $\sum_{n \geq 0} |a_n| (|z| + |h|^{1/3})^n < \infty$; $\binom{n}{2} |z|^{n-2} \leq \frac{n^2}{2} |z|^{n-2}$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2} |a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$, car $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$, donc le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n n^2 z^{n-2}$ est aussi ρ . Ainsi, $\sum_{n \geq 0} |a_n| \binom{n}{2} |z|^{n-2} \leq \sum_{n \geq 0} |a_n| \frac{n^2}{2} |z|^{n-2} < \infty$. On en déduit que

$$\left| \sum_{n \geq 0} a_n \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-2} z^{n-k} \right| \leq \sum_{n \geq 0} |a_n| \left[\binom{n}{2} |z|^{n-2} + (|z| + |h|^{1/3})^n \right] < \infty,$$

donc

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}^*}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}^*}} \sum_{n \geq 0} a_n n z^{n-1} + h \cdot \sum_{n \geq 0} a_n \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-2} z^{n-k} \\ &= \sum_{n \geq 0} a_n n z^{n-1} \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.8. Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, une fonction analytique qui converge pour $z \in D(0, \rho)$ avec $\rho > 0$. Alors, f est infiniment différentiable au sens complexe sur $D(0, \rho)$ (et au sens réel entre $D(0, \rho) \subset \mathbb{R}^2$ et \mathbb{R}^2) et on a

$$f^{(k)} = \sum_{n \geq k} a_n \frac{n!}{(n-k)!} z^{n-k} \quad (2.5)$$

qui converge sur $D(0, \rho)$

Démonstration. On peut procéder à une preuve par récurrence.

$k = 1$

Comme on l'a montré dans la proposition 2.7, si f est holomorphe, donc en particulier analytique, on peut écrire $f'(z) = \sum_{n \geq 1} a_n n z^{n-1}$ qui converge sur $D(0, \rho)$. Ce qui conclut le cas $k = 1$.

$k \rightarrow k + 1$

Admettons désormais que $f^{(k)} = \sum_{n \geq k} a_n \frac{n!}{(n-k)!}$, on veut montrer que $f^{(k+1)} = \sum_{n \geq k+1} a_n \frac{n!}{(n-k-1)!}$. On définit pour cela une suite $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $b_n = a_{n+k} \frac{n!}{(n-k)!}$ puis une nouvelle fonction $g(z) := f^{(k)}(z)$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n \geq k} a_n \frac{n!}{(n-k)!} z^{n-k} = \sum_{n \geq k} b_{n-k} z^{n-k} & m &:= n - k \\ &= \sum_{m \geq 0} b_m z^m \end{aligned}$$

Donc g est une fonction analytique et on peut écrire $g'(z) = \sum_{m \geq 1} b_m m z^{m-1}$, en remplaçant nos définitions

$$\begin{aligned} f^{(k+1)} = g'(z) &= \sum_{m \geq 1} b_m m z^{m-1} = \sum_{n \geq k+1} b_{n-k} (n-k) z^{n-k-1} \\ &= \sum_{n \geq k+1} a_n \frac{n!}{(n-k)!} (n-k) z^{n-k-1} = \sum_{n \geq k+1} a_n \frac{n!}{(n-k-1)!} z^{n-k-1} \end{aligned}$$

Ce qui conclut l'hypothèse de récurrence et termine la preuve. □

Remarque 2.9. On peut utiliser 2.5 pour extraire les coefficients a_n en termes des dérivées de f en $z = 0$.

En fait, on a $f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k \implies a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ alors $f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$. Plus généralement, on a $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-p)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(p)}{n!} (z-p)^n$, $z \in D(p, \rho)$ avec un rayon de convergence $\rho > 0$.

Proposition 2.10. Soient $U, V \subseteq \mathbb{C}$, des domaines, $f : U \rightarrow V$ holomorphe et $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Alors, la composition $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe sur U et pour tout z dans U , $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$

Démonstration. On sait, grâce au cours d'analyse 2, que la composition est continue. Alors, si on interprète f, g comme applications entre sous-ensembles de \mathbb{R}^2 , on a la règle de décomposition $D(g \circ f)(\underbrace{z}_{\in \mathbb{R}^2}) = Dg(f(z)) \cdot Df(z)$. Ceci revient en fait à la multiplication par $f'(z)$ pour $Df(z)$ et celle par $g'(f(z))$ pour $Dg(f(z))$. \square

Lemme 2.11. Soit $\gamma : [s, t] \rightarrow \mathbb{C}$, de classe C^1 et soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Alors, la composition $f \circ \gamma : [s, t] \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^1 et on a $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ où $\gamma'(t) = \gamma'_1(t) + i\gamma'_2(t)$.

Démonstration. Comme pour la proposition précédente, c'est une translation de la règle de composition $D(f \circ \gamma)(t) = Df(\gamma(t))D\gamma(t)$ \square

Chapitre 3

Intégration de fonctions

3.1 Introduction

Dans le cadre de l'intégration sur \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 , la paramétrisation n'avait pas une grande influence sur le résultat ; cependant, dans \mathbb{C} , il nous faut définir rigoureusement un moyen d'intégrer le long d'une paramétrisation.

Définition 3.1 (Chemins & chemins fermés). Soit $\gamma : [s, t] \rightarrow \mathbb{C}$, une application continue. On appelle γ un chemin / contour pourvu qu'il existe une partition $[s, t] = \bigcup_{j=1}^k I_j$ où les I_j sont des sous-intervalles fermés disjoints aux extrémités près, tels que $\gamma|_{I_j}$ est de classe C^1 , pour tout $j \geq 1$.

On dit que γ est un chemin fermé si $\gamma(s) = \gamma(t)$ et on l'appelle lacet ou contour fermé.

Exemple 3.2. Prenons $[s, t] = [0, 2]$ et posons

$$\begin{aligned} [0, 2] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \gamma_1 : \quad u &\longmapsto \gamma(u) = \begin{cases} u + iu, & u \in [0, 1] \\ u + i, & u \in [1, 2] \end{cases} \end{aligned}$$

Alors, γ_1 est un chemin et

$$\gamma_2 : \begin{aligned} [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ u &\longmapsto e^{2\pi i u} \end{aligned}$$

est aussi un chemin fermé

Définition 3.3 (Intégrale d'une fonction le long d'un chemin). Soit $U \subset \mathbb{C}$, un domaine, et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, continue et soit $\gamma : [s, t] \rightarrow U$, un chemin. Alors on définit

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_s^t f(\gamma(\tau)) \gamma'(\tau) d\tau \quad \left(= \sum_{j=1}^k \int_{I_j} f(\gamma|_{I_j}(\tau)) \gamma'|_{I_j}(\tau) d\tau \right)$$

où on rappelle $\gamma(\tau) = \gamma_1(\tau) + i\gamma_2(\tau)$ et $\gamma'(\tau) = \gamma_1'(\tau) + i\gamma_2'(\tau)$.

Remarque 3.4. Si le chemin est fermé (un lacet), on utilise la notation

$$\oint_{\gamma} f(z) dz$$

Et si on veut mettre en avant le sens d'orientation de γ , on utilise aussi des fois la notation

$$\oint_{\gamma} f(z) dz, \quad \oint_{\gamma} f(z) dz$$

Exemple 3.5. Soient

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \tau & \longmapsto & e^{2i\pi\tau} \end{array}, \quad f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^n \end{array}.$$

On peut alors affirmer

$$\oint f_n(z) dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$$

En effet, le chemin est de classe C^1 et $\frac{d}{d\tau}(e^{2\pi i\tau}) = 2\pi i e^{2\pi i\tau}$. Donc, pour $f = f_{-1}$,

$$\oint_0^1 f(\gamma(\tau))\gamma'(\tau)d\tau = \oint_0^1 \frac{1}{e^{2\pi i\tau}} 2\pi i \cdot e^{2\pi i\tau} d\tau = 2\pi i \cdot \oint_0^1 d\tau = 2\pi i$$

Ensuite, pour $n \neq -1$, on écrit

$$\begin{aligned} \oint_0^1 e^{2\pi i n\tau} \cdot e^{2\pi i\tau} d\tau &= \oint_0^1 e^{2\pi i(n+1)\tau} d\tau, \quad \alpha = 2\pi(n+1) \\ &= \oint_0^1 e^{i\alpha\tau} d\tau = \oint_0^1 \cos(\alpha\tau) + i \sin(\alpha\tau) d\tau \\ &= \frac{\sin(\alpha\tau)}{\alpha} - i \frac{\cos(\alpha\tau)}{\alpha} \Big|_0^1 = \frac{1}{i\alpha} (\cos(\alpha\tau) + i \sin(\alpha\tau)) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{\alpha i} e^{i\alpha\tau} \Big|_0^1 = \frac{1}{2\pi(n+1)i} e^{i2\pi(n+1)\tau} \Big|_0^1 = 0 \end{aligned}$$

On aurait également pu intégrer la forme complexe de l'exponentielle directement, cette solution est utilisée pour donner un exemple qui travaille avec la forme trigonométrique.

Définition 3.6. Soit $\gamma : [s, t] \rightarrow \mathbb{C}$, un chemin. Une reparamétrisation de γ est donnée par une composition $\gamma \circ \varphi$ où $\varphi : [\tilde{s}, \tilde{t}] \rightarrow [s, t]$ est un C^1 -difféomorphisme. On note alors

$$(\gamma \circ \varphi) : \begin{array}{ccc} [\tilde{s}, \tilde{t}] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \tau & \longmapsto & \gamma(\varphi(\tau)) \end{array}$$

Remarque 3.7. Par convention, la reparamétrisation suit le sens du chemin de base, i.e. $\text{sgn}(\varphi') = 1$.

Lemme 3.8. Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue, alors

$$\int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

Démonstration. Par définition,

$$\int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz = \int_{\tilde{s}}^{\tilde{t}} f(\gamma(\varphi(\tau))) (\gamma \circ \varphi)'(\tau) d\tau = \int_{\tilde{s}}^{\tilde{t}} f(\gamma(\varphi(\tau))) \gamma'(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau.$$

En posant $G(u) = f(\gamma(u))\gamma'(u)$, on obtient

$$\int_{\tilde{s}}^{\tilde{t}} G(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau.$$

Par la règle de substitution de Riemann, ceci vaut

$$\int_{\varphi(\tilde{s})}^{\varphi(\tilde{t})} G(u) du = \int_s^t f(\gamma(u)) \gamma'(u) du = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Le lemme est donc démontré. □

3.2 Propriétés clés

Propriété I : Inversion de chemin

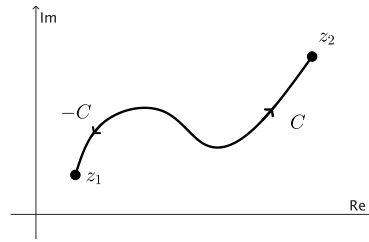


FIGURE 3.1 – Illustration d'un chemin et de son chemin inverse dans le plan complexe.

[Source de l'image](#)

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine, on considère un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$, et le chemin inverse $-\gamma : [0, 1] \rightarrow U$, $t \mapsto \gamma(1 - t)$. L'intégrale d'une fonction continue $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ le long de γ est

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

Propriété 3.9. Pour toute fonction f continue sur U et tout chemin γ ,

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

Démonstration.

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = \int_0^1 f(\gamma(1-t)) \cdot (-\gamma)'(1-t) dt \stackrel{\substack{1-t=s, \\ ds=-dt}}{=} - \int_1^0 f(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) ds = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

□

Propriété II : Concaténation de chemin

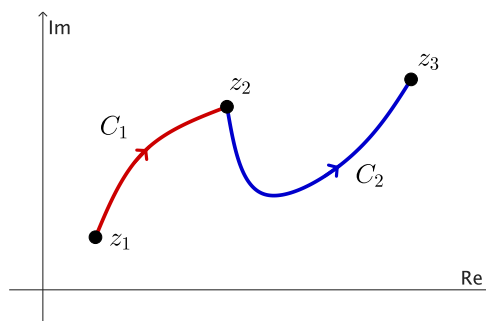


FIGURE 3.2 – Illustration de la concaténation de deux chemins dans le plan complexe.

[Source de l'image](#)

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine, supposons que $\gamma : [a, b] \rightarrow U$, $\tilde{\gamma} : [b, c] \rightarrow U$ sont des chemins, avec $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$. On pose

$$\gamma \oplus \tilde{\gamma} : \begin{array}{l} [a, c] \longrightarrow U \\ u \longmapsto \begin{cases} \gamma(u), & u \in [a, b] \\ \tilde{\gamma}(u), & u \in [b, c] \end{cases} \end{array}$$

Clairement, $\gamma \oplus \tilde{\gamma}$ est C^1 par morceaux, il s'agit donc d'un chemin.

Propriété 3.10. Pour toute fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma, \tilde{\gamma}$ tels que ci-dessus, on a

$$\int_{\gamma \oplus \tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \oplus \tilde{\gamma}} f(z) dz &= \int_a^c f(\gamma \oplus \tilde{\gamma}(t))(\gamma \oplus \tilde{\gamma})'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\gamma \oplus \tilde{\gamma}(t))(\gamma \oplus \tilde{\gamma})'(t) dt + \int_b^c f(\gamma \oplus \tilde{\gamma}(t))(\gamma \oplus \tilde{\gamma})'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt + \int_b^c f(\tilde{\gamma}(t))\tilde{\gamma}'(t) dt = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz. \end{aligned}$$

□

Remarque 3.11. Si $\tilde{\gamma} = -\gamma$, alors $\tilde{\gamma} = \gamma(a + b - t)$, $t \in [a, b]$. Pour pouvoir concaténer avec la définition ci-dessus (second chemin de $[b, c]$), alors on doit le reparamétriser sur $[b, 2b - a]$ par $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(2b - u)$, $u \in [b, 2b - a]$, de sorte que $\tilde{\gamma}(b) = \gamma(b)$ et donc que $\gamma \oplus \tilde{\gamma}$ soit bien définie. On trouve alors :

$$\int_{\gamma \oplus (-\gamma)} f(z) dz = 0.$$

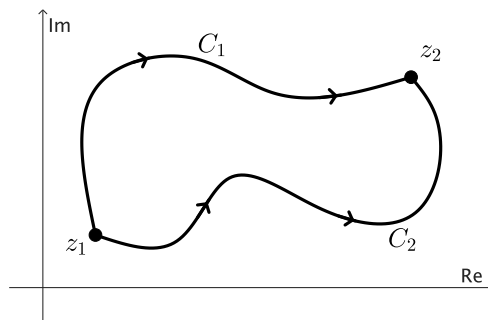


FIGURE 3.3 – Chemins indépendants formant un lacet.

[Source de l'image](#)

Propriété III : Intégration de la dérivée d'une fonction holomorphe

Propriété 3.12. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On pose $g(z) = f'(z)$ la dérivée complexe de f . Soit $\gamma : [s, t] \rightarrow U$ un chemin.

$$\int_{\gamma} g(z) dz = (f \circ \gamma)(t) - (f \circ \gamma)(s).$$

Autrement dit, $\int_{\gamma} g(z) dz$ est indépendant du chemin.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \int_s^t f'(\gamma(u))\gamma'(u) du &= \int_s^t \frac{d}{du} (f(\gamma(u))) du \\ &= [f(\gamma(u))]_s^t && \text{thm. fond. du calcul int.} \\ &= (f \circ \gamma)(t) - (f \circ \gamma)(s). \end{aligned}$$

□

Définition 3.13. On dit qu'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ continue admet une primitive sur U , pourvu qu'il existe une fonction holomorphe $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ avec

$$F' = f.$$

Corollaire 3.14. Si γ est un lacet, et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ admet une primitive F sur U , alors $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Démonstration.

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \int_s^t f(\gamma(u))\gamma'(u) du = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

□

Corollaire 3.15 (du corollaire). Soit $U = \mathbb{C}^*$. Alors la fonction $\frac{1}{z} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ n'admet pas de primitive sur \mathbb{C}^* .

Démonstration. Supposons qu'il existe F sur \mathbb{C}^* holomorphe telle que $F'(z) = \frac{1}{z}$. Alors, par le corollaire précédent, l'intégrale sur tout lacet serait nulle. Or, pour le cercle unité $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i \neq 0.$$

□

Remarque 3.16. une primitive de $1/z$ serait un $\log z$ global, or par la proposition 1.52, il n'existe pas de fonction \log monovaluée sur \mathbb{C}^* .

Propriété IV : Intégration par parties (/partielles)

Propriété 3.17. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, et $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes. Alors, si $\gamma : [s, t] \rightarrow U$ est un lacet, il s'ensuit que

$$\int_{\gamma} f'(z)g(z) dz = - \int_{\gamma} f(z)g'(z) dz.$$

C'est une conséquence de la sous-section précédente et de la règle du produit (Leibniz).

Démonstration.

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} f'(z)g(z) dz + \oint_{\gamma} g(z)g'(z) dz &= \oint_{\gamma} [f'(z)g(z) + f(z)g'(z)] dz \\ &= \oint_{\gamma} (fg)'(z) dz = f \circ g(t) - f \circ g(s) = 0. \end{aligned}$$

□

Propriété V : Estimations d'intégrales

Propriété 3.18. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, si $\gamma : [s, t] \rightarrow U$ est un chemin et $f \in C^0(U)$, alors

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{u \in [s, t]} |f(\gamma(u))| \cdot \int_s^t |\gamma'(u)| du.$$

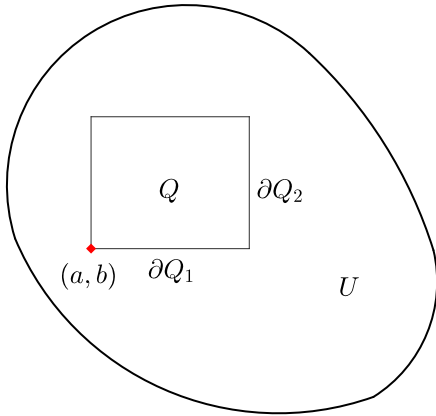
Remarque 3.19. $\int_s^t |\gamma'(u)| du$ est la longueur du chemin, intuitivement si on somme la valeur que prend f tout au long du chemin, elle sera inférieure à si on sommait la valeur maximale que f prend sur l'ensemble du chemin en chaque point du chemin.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &\leq \int_{\gamma} |f(z)| dz \leq \int_s^t |f(\gamma(u))\gamma'(u)| du \\ &\leq \int_s^t \max_{u \in [s,t]} |f(\gamma(u))| \cdot |\gamma'(u)| du = \max_{u \in [s,t]} |f(\gamma(u))| \cdot \int_s^t |\gamma'(u)| du. \end{aligned}$$

□

3.3 Intégrales le long de lacets pour des fonctions holomorphes ; situation spéciale



Soit Q un carré dans U , ∂Q est le bord du carré.

On paramétrise ∂Q linéaire par morceaux.

$$\partial Q_1 : t \mapsto a + bi + t, \quad t \in [0, 1]$$

$$\partial Q_2 : t \mapsto a + 1 + bi + i(t - 1), \quad t \in [1, 2].$$

Lemme 3.20 (Lemme de Goursat). *Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, Q un carré dans U et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe en tout $p \in U$ (par forcément C^1). Alors*

$$\int_{\partial Q} f(z) dz = 0.$$

Remarque 3.21. On peut tout à fait remplacer ∂Q par un triangle, la preuve resterait inchangée.

Démonstration. On utilisera un argument par l'absurde et un Lemme technique.

Lemme 3.22. *Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $p \in U$, $f \in C^0(U)$ qui est holomorphe en p . Soit Q un petit carré dans U contenant p dans son intérieur, et supposons que $\text{diam}(Q) = \varepsilon > 0$. Ensuite,*

$$\int_{\partial Q} f(z) dz = o(\varepsilon^2)$$

si et seulement si étant donné $\delta > 0$, $\exists \varepsilon_* > 0$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq \varepsilon_*$, on a

$$\left| \int_{\partial Q} f(z) dz \right| \leq \delta \cdot \varepsilon^2.$$

Démonstration. Par holomorphicité de f en p ,

$$f(z) = f(p) + f'(p)(z - p) + o(\|z - p\|).$$

La partie principale $f(p) + f'(p)(z - p)$ admet une primitive :

$$F(z) = zf(p) + \frac{1}{2}f'(p)(z - p)^2 \implies \int_{\partial Q} [f(p) + f'(p)(z - p)] dz = 0. \quad (\text{par 3.2})$$

Par définition de $o(|z - p|)$, il existe un $\varepsilon_\star > 0$ tel que $|z - p| < \varepsilon_\star \Rightarrow o(|z - p|) < \delta|z - p|$. Soit $\varepsilon \leq \varepsilon_\star$,

$$\left| \int_{\partial Q} o(\|z - p\|) dz \right| \leq \text{Long}(\partial Q) \sup_{\partial Q} \|o(z - p)\| \leq \text{Long}(\partial Q) \delta \sup_{\partial Q} |z - p| = 2\sqrt{2} \cdot \delta \cdot \varepsilon^2$$

□

Suite de la preuve du Lemme de Goursat. Supposons que pour un f satisfaisant les hypothèses de Goursat, on a $\int_{\partial Q} f(z) dz \neq 0$. On peut supposer que $\left| \int_{\partial Q} f(z) dz \right| \geq 1$. Par 3.2, on peut écrire

$$\int_{\partial Q} = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial Q_j} f(z) dz.$$

Donc,

$$1 \leq \sum_{j=1}^4 \left| \int_{\partial Q_j} f(z) dz \right|,$$

où $Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4 = Q$ (on a séparé Q en 4 rectangles). Ceci implique qu' $\exists j \leq 4$ tel que $\left| \int_{\partial Q_j} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4}$.

On recommence dans Q^1 : on le redécoupe en 4, on choisit celui qui a la valeur absolue de l'intégrale la plus grande, noté Q^2 , etc. On construit de manière itérative une suite emboîtée de carrés

$$Q \supset Q^1 \supset Q^2 \supset \dots$$

telle que pour tout $n \geq 0$,

$$\text{diam}(Q^n) = 2^{-n} \text{Diam}(Q), \quad \left| \int_{\partial Q^n} f(z) dz \right| > \frac{1}{4^n}. \quad (3.1)$$

Comme les carrés sont emboîtés et leur diamètre tend vers 0, leur intersection est un point unique $p \in U$ tel que $Q^n \rightarrow p$. Or, d'après le Lemme 3.22, on sait que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial Q^n} f(z) dz \right| &\leq \delta \left(\frac{\text{diam}(Q)}{2^n} \right)^2 = \delta \frac{1}{2^{2n}} \text{diam}(Q)^2 \\ &= \frac{\delta}{4^n} \text{diam}(Q)^2 \end{aligned}$$

pourvu que, avec $\delta > 0$ donné, n soit suffisamment grand. Mais si $\delta < \frac{1}{\text{diam}(Q)^2}$, alors c'est $< \frac{1}{4^n}$, contredisant, ce qui contredit 3.1. □

3.3.1 Concepts topologiques

Maintenant, il faut introduire quelques concepts topologiques.

Définition 3.23 (Homotopie entre chemins). Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine (fixe), et soient $\gamma, \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow U$ deux lacets dans U .

Alors on dit que γ est homotope à $\tilde{\gamma}$ pourvu qu'il existe une application continue

$$\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$$

telle que

- (i) $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$,
- (ii) $\Gamma(1, t) = \tilde{\gamma}(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$,

(iii) pour tout $s \in [0, 1]$, l'application $t \mapsto \gamma_s(t) = \Gamma(s, t)$ est un lacet.

Si $\gamma, \tilde{\gamma}$ sont des chemins tels que $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$ et $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$, on dit que γ et $\tilde{\gamma}$ sont homotopes pourvu qu'il existe une application continue $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ telle que

- (i) $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$, pour tout $t \in [0, 1]$,
- (ii) $\Gamma(1, t) = \tilde{\gamma}(t)$, pour tout $t \in [0, 1]$,
- (iii) pour tout $s \in (0, 1)$, l'application $t \mapsto \Gamma(s, t)$ est un chemin qui lie $\gamma(0)$ à $\gamma(1)$.

Définition 3.24 (Lacet contractible). On dit qu'un lacet $\gamma : [0, 1] \rightarrow U \subseteq \mathbb{C}$ est contractible pourvu qu'il soit homotope à un lacet trivial (constant)

Définition 3.25 (Domaine simplement connexe). On dit qu'un domaine $U \subseteq \mathbb{C}$ est simplement connexe pourvu que tout lacet soit contractible dans U .

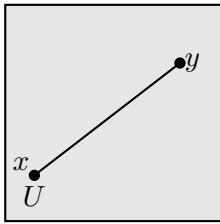
Exemple 3.26. \mathbb{C} est simplement connexe, \mathbb{C}^* ne l'est pas.

Définition 3.27. On appelle un domaine $U \subseteq \mathbb{C}$ étoilé pourvu qu'il existe un point $z_* \in U$ tel que $\forall z \in U$, le segment de ligne droite $[z_*, z] := \{w \in \mathbb{C} \mid w = (1-t)z_* + tz, t \in [0, 1]\} \subseteq U$.

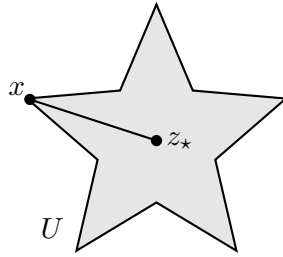
Remarque 3.28. On a les implications suivantes sur un domaine U :

U est convexe $\implies U$ est étoilé $\implies U$ est simplement connexe.

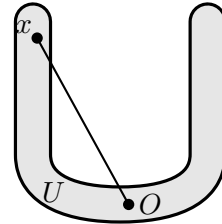
Et les réciproques ne sont pas vraies en générales



(a)



(b)



(c)

On voit clairement que le (a) est convexe, le (b) est étoilé (de tout point on peut tirer une droite vers le centre de l'étoile), mais n'est pas convexe (il n'existe pas de chemin droit entre les pointes de l'étoile), et (c) est simplement connexe mais pas étoilé.

Proposition 3.29. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$, un domaine étoilé et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe en tout $p \in U$. Alors, f admet une primitive, donc il existe $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe avec $F'(w) = f(w)$ pour tout $w \in U$.

Démonstration. Soit $w \in U$ arbitraire et posons $F(w) = \int_{[z_*, w]} f(z) dz$ avec z_* le "point d'étoile" de U . On veut alors montrer que F est holomorphe et que $F'(w) = f(w)$ pour tout $w \in U$. On va en fait se servir de la deuxième caractérisation de l'holomorphie.

Soit $\tilde{w} \in U$, un point proche de w de telle sorte que $[w, \tilde{w}] \subset U$, on considère la différence $F(\tilde{w}) - F(w) = \int_{[z_*, \tilde{w}]} f(z) dz - \int_{[z_*, w]} f(z) dz$.

D'après le lemme de Goursat,

$$\int_{\partial\Delta(z_*, w, \tilde{w})} f(z) dz = \int_{[z_*, w]} f(z) dz + \int_{[w, \tilde{w}]} f(z) dz - \int_{[z_*, \tilde{w}]} f(z) dz = 0.$$

On peut donc écrire $F(\tilde{w}) = \int_{[z_*, \tilde{w}]} f(z) dz = \int_{[z_*, w]} f(z) dz + \int_{[w, \tilde{w}]} f(z) dz$, alors $F(\tilde{w}) - F(w) = \int_{[w, \tilde{w}]} f(z) dz$.

Comme f est continue, on peut écrire $f(z) = f(w) + h(z)$ où $\lim_{z \rightarrow w} |h(z)| = 0$, d'où on peut écrire $\int_{[w, \tilde{w}]} f(z) dz = \int_{[w, \tilde{w}]} [f(w) + h(z)] dz = (\tilde{w} - w)f(w) + o(\|\tilde{w} - w\|)$, alors,

$$\begin{aligned} F'(w) &= \lim_{\tilde{w} \rightarrow w} \frac{F(\tilde{w}) - F(w)}{\tilde{w} - w} = \lim_{\tilde{w} \rightarrow w} \frac{\int_{[w, \tilde{w}]} f(z) dz}{\tilde{w} - w} \\ &= \lim_{\tilde{w} \rightarrow w} \frac{\int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt}{\tilde{w} - w}, \quad \gamma(t) = w + t(\tilde{w} - w), \quad t \in [0, 1] \\ &= \lim_{\tilde{w} \rightarrow w} \frac{(\tilde{w} - w) \int_0^1 f(w + t(\tilde{w} - w)) dt}{\tilde{w} - w} = \int_0^1 \lim_{\tilde{w} \rightarrow w} f(w + t(\tilde{w} - w)) dt = f(w) \int_0^1 dt = f(w), \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. \square

Remarque 3.30. Une preuve alternative de cette démonstration consiste à montrer que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ pour tout lacet dans un domaine étoilé $U \subseteq \mathbb{C}$ mais sous l'hypothèse plus forte que f est holomorphe :

Supposons que $z_* = 0$ est un centre de U , $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ un lacet et on introduit la famille de lacets déformés $\gamma_s(t) = s \cdot \gamma(t)$ avec $s \in [0, 1]$.

On considère ensuite la fonction $I(s) = \int_{\gamma_s} f(z) dz = \int_0^1 f(s\gamma(t)) s\gamma'(t) dt$, en dérivant par rapport à s :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_{\gamma_s} f(z) dz &= \int_0^1 \frac{d}{ds} [f(s \cdot \gamma(t)) \cdot s \cdot \gamma'(t)] dt \\ &= \int_0^1 [f'(s \cdot \gamma(t)) \cdot \gamma(t) \cdot s \cdot \gamma'(t) + f(s \cdot \gamma(t)) \gamma'(t)] dt \\ &= \frac{1}{s} \int_0^1 [f'(s \cdot \gamma(t)) \cdot \gamma(t) \cdot s + f(s \cdot \gamma(t))] s\gamma'(t) dt \quad s > 0 \end{aligned}$$

$$f'(s \cdot \gamma(t)) \cdot \gamma(t) \cdot s + f(s \cdot \gamma(t)) = [f'(z)z + f(z)]_{z=s\gamma(t)} = \frac{d}{dz} \left[\underbrace{f(z)z}_{\text{holomorphe}} \right]_{z=s\gamma(t)}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_{\gamma_s} f(z) dz &= \frac{1}{s} \int_0^1 [f'(s \cdot \gamma(t)) \cdot \gamma(t) \cdot s + f(s \cdot \gamma(t))] s\gamma'(t) dt \\ &= \frac{1}{s} [f(s \cdot \gamma(t)) \cdot s \cdot \gamma(t)]_0^1 \\ &= f(s \cdot \gamma(1))\gamma(1) - f(s \cdot \gamma(0))\gamma(0) \quad \gamma(1) = \gamma(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Après ces calculs légèrement laborieux, on conclut qu'intégrer f sur n'importe quel lacet nous donne 0. Le lien avec les primitives se fait avec la proposition 3.38 : considérons deux points arbitraires $z_1, z_2 \in U$, soient deux chemins γ_1, γ_2 entre ces deux points. On remarque alors que la concaténation $\gamma_1 \oplus -\gamma_2$ est un lacet ! Ainsi,

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1 \oplus -\gamma_2} f(z) dz = 0 \implies \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

La valeur de l'intégrale est ainsi indépendante du chemin. En faisant écho à la proposition 3.38, on conclut que f possède bien une primitive sur U .

Corollaire 3.31. Soient $U \subseteq \mathbb{C}$, un domaine étoilé, $\gamma \subset U$, un lacet et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe en tout $p \in U$.

Alors, on a

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Démonstration. Comme U est étoilé et que f est holomorphe en tout $p \in U$, on sait par la proposition 3.29 que f admet une primitive F . Alors, par le corollaire 3.14, on sait que $\int_{\gamma} f(t)dt$ est nulle car γ est un lacet et que F est la primitive de f . \square

Nous souhaitons à présent étendre ce principe aux domaines connexes en général, On commence par introduire une définition et un lemme.

Définition 3.32 (Chemins homotopes au sens fort de la topologie). Soient $U \subseteq \mathbb{C}$, un domaine et 2 lacets $\gamma, \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow U$.

On dit que γ et $\tilde{\gamma}$ sont homotopes au sens fort de topologie s'il existe une fonction $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ continue telle que

1. $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$;
2. $\Gamma(1, t) = \tilde{\gamma}(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$;
3. pour tout $s \in (0, 1)$, $\Gamma(s, 0) = \Gamma(s, 1)$ ($\Gamma(s, \bullet)$ est un chemin fermé mais à la différence de la définition 3.23, on n'exige pas que celui-ci soit C^1 par morceau).

Lemme 3.33. Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $\gamma, \tilde{\gamma} : [0, 1]$ deux lacets homotopes au sens fort de topologie et $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$, l'homotopie continue qui les relie.

Alors, pour tout $\delta > 0$, il existe une famille de lacets continus $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M$ tels que $d(\gamma_j, \gamma_{j+1}) = \max_{t \in [0, 1]} |\gamma_j(t) - \gamma_{j+1}(t)| < \delta$ pour $j = 1, 2, \dots, M$ et $d(\gamma, \gamma_1) < \delta, d(\gamma_M, \tilde{\gamma}) < \delta$

Démonstration. Comme la fonction $\Gamma : [0, 1]^2 \rightarrow U$ est continue, et que $[0, 1]^2$ est compacte on sait que la fonction est donc uniformément continue. Pour tout $\delta > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $s, s' \in U$ et pour tout $t \in [0, 1]$, tels que $|s' - s| < \eta$, $d(\Gamma(s, t), \Gamma(s', t)) < \delta$. Fixons $0 < r < \eta$, on choisit une partition de $[0, 1]$ de pas $r : s_0, \dots, s_M$ et on a bien que $d(\Gamma(s_i, t), \Gamma(s_{i+1}, t)) < \delta$, pour tout $i = 0, \dots, M$. \square

Remarque 3.34. Pour rappel, dans la définition d'homotopie au sens fort de topologie, nous n'avons pas exigé que pour tout $s \in (0, 1)$, $\Gamma(s, t)$ soit un lacet, on ne peut donc à priori pas calculer l'intégrale de f sur ces chemins fermés. Cependant, en utilisant l'approximation polygônale ou la régularisation par convolution, on peut, pour tout $\varepsilon > 0$, remplacer γ_i par $\tilde{\gamma}_i$, C^1 par morceaux (ou même C^∞), fermé et tel que $\sup_{t \in [0, 1]} (\gamma_i(t) - \tilde{\gamma}_i(t)) < \varepsilon$ et $\tilde{\gamma}_i([0, 1]) \subset U$. En prenant ε assez petit, on conserve $d(\tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_{i+1}) < \delta$. Ainsi, les intégrales le long de ces lacets sont bien définies.

Proposition 3.35. Soient $U \subseteq \mathbb{C}$, un domaine et $\gamma, \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow U$ deux lacets homotopes au sens fort de topologie.

Alors, si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe en tout $p \in U$, on a

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz$$

Démonstration. Soit $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ continu, clairement, $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ est compact, alors, par un résultat d'analyse 2, $K := \Gamma([0, 1] \times [0, 1])$ est également compact.

Soit maintenant $V \subset U$, un ouvert tel que $K \subset V$ et $\bar{V} \subset U$ est également compact¹. Par hypothèse, $\bar{V} \subset U$ et U est un domaine (en particulier U est ouvert) donc, pour tout $p \in \bar{V}$, on

1. où \bar{V} est la fermeture de V

peut trouver $\delta_p > 0$ tel que $D(p, \delta_p) \subset U$. On peut ainsi écrire $\bar{V} \subset \bigcup_{p \in \bar{V}} D(p, \delta_p/10)$, par le théorème de Heine-Borel, il existe un sous-ensemble fini tel que $\bar{V} \subset \bigcup_{i=1}^N D(p_i, \delta_{p_i}/10)$. On pose

$$\delta = \min_{j=1, \dots, N} \frac{\delta_{p_j}}{10} > 0$$

On définit une suite de lacets $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M : [0, 1] \rightarrow V$ comme donnée dans le lemme 3.33 et on veut montrer que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz = \dots = \int_{\gamma_M} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz$$

Pour montrer cela, nous allons procéder par récurrence, en montrant l'égalité pour 2 chemins successifs.

Considérons alors un chemin quelconque γ_i et son successeur dans la séquence γ_{i+1} .

On va partitionner $[0, 1] = \bigcup_{j=0}^k [t_j, t_{j+1}]$ tel que $\|\gamma_i(t_j) - \gamma_i(t_{j+1})\| < \delta$ et $\|\gamma_{i+1}(t_j) - \gamma_{i+1}(t_{j+1})\| < \delta$. Cette partition est toujours possible car γ_i et γ_{i+1} sont continus sur \bar{V} qui est compact.

On construit ensuite un lacet ρ_j pour chaque intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ défini par morceaux

ρ_{i1} Le morceau γ_i sur $[t_j, t_{j+1}]$

ρ_{i2} Le segment de $\gamma_i(t_{j+1})$ à $\gamma_{i+1}(t_{j+1})$

ρ_{i3} Le morceau γ_{i+1} sur $[t_j, t_{j+1}]$ **dans le sens inverse**

ρ_{i4} Le segment de $\gamma_{i+1}(t_j)$ à $\gamma_i(t_j)$

Remarquons que, par construction, tout point de ρ_j est compris dans le disque $D(\gamma_i(t_j), 2\delta) \subset U$. Alors, comme f est holomorphe et $D(\gamma_i(t_j), 2\delta)$ est clairement un domaine étoilé, en utilisant le corollaire 3.31, on sait que $\int_{\rho_i} f(z) dz = 0$.

On peut alors faire le calcul

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^k \int_{\rho_i} f(z) dz \\ &= \sum_{i=0}^k \int_{\rho_{i1}} f(z) dz + \int_{\rho_{i2}} f(z) dz + \int_{\rho_{i3}} f(z) dz + \int_{\rho_{i4}} f(z) dz \\ &= \sum_{i=0}^k \int_{\rho_{i1}} f(z) dz + \sum_{i=0}^k \int_{\rho_{i2}} f(z) dz + \sum_{i=0}^k \int_{\rho_{i3}} f(z) dz + \sum_{i=0}^k \int_{\rho_{i4}} f(z) dz \\ &= \int_{\gamma_i} f(z) dz + \sum_{i=0}^k \int_{\gamma_i(t_{j+1})}^{\gamma_{i+1}(t_{j+1})} f(z) dz + \int_{-\gamma_{i+1}} f(z) dz + \sum_{i=0}^k \int_{\gamma_{i+1}(t_j)}^{\gamma_i(t_j)} f(z) dz \\ &= \int_{\gamma_i} f(z) dz - \int_{\gamma_{i+1}} f(z) dz + \sum_{i=0}^k \int_{\gamma_i(t_{j+1})}^{\gamma_{i+1}(t_{j+1})} f(z) dz + \sum_{i=0}^k \int_{\gamma_{i+1}(t_j)}^{\gamma_i(t_j)} f(z) dz \end{aligned}$$

Or, on observe que $\sum_{i=0}^k \int_{\gamma_i(t_{j+1})}^{\gamma_{i+1}(t_{j+1})} f(z) dz$ et $\sum_{i=0}^k \int_{\gamma_{i+1}(t_j)}^{\gamma_i(t_j)} f(z) dz$ correspondent aux sommes sur les segments qui relient les 2 morceaux de lacets, chacun est parcouru dans les deux sens, alors les 2 sommes s'annulent nécessairement. On peut conclure

$$\int_{\gamma_i} f(z) dz = \int_{\gamma_{i+1}} f(z) dz$$

Et ce, pour tout $i = 0, 1, 2, \dots, M$ ainsi, nous avons bien démontré que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz = \dots = \int_{\gamma_M} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz$$

et la démonstration est terminée. \square

Corollaire 3.36. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe en tout $p \in U$. Alors, si $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ est un lacet contractible au sens fort de topologie, i.e. γ est holomorphe à un chemin constant, alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Démonstration. Comme γ est homotope à un lacet constant γ' et que f est holomorphe en tout $p \in U$, on peut appliquer la proposition 3.35 pour pouvoir écrire

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma'} f(z) dz = 0$$

L'affirmation $\int_{\gamma'} f(z) dz = 0$ est claire car γ' est constant compris dans U ouvert, donc en particulier, γ' est un lacet et comme f est holomorphe, on peut appliquer le lemme 3.31 \square

Corollaire 3.37. Si $U \subseteq \mathbb{C}$ est simplement connexe et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe, alors $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ pour tout lacet $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$

Démonstration. Comme tout lacet est contractible, on peut directement appliquer le corollaire 3.36 en remarquant que les hypothèses sont les mêmes. \square

Proposition 3.38. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, et $f \in C^0(U)$. Alors f admet une primitive si et seulement si

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0, \quad \forall \text{ lacet } \gamma : [s, t] \rightarrow U.$$

Démonstration. — " \Rightarrow " : c'est une conséquence de la troisième propriété des intégrales (3.2).

— " \Leftarrow " : On utilise une variation de l'argument d'auparavant : choisissons $p \in U$, et définissons

$$g(w) = \int_{\gamma} f(z) dz,$$

où $\gamma : [s, t] \rightarrow U$ est un chemin en U qui lie p à z . Ceci est bien défini parce que si $\tilde{\gamma}$ est un autre chemin liant p à z , alors $\gamma \oplus -\tilde{\gamma}$ est un lacet, et d'après hypothèse,

$$\int_{\gamma \oplus -\tilde{\gamma}} f(z) dz = 0.$$

D'après la deuxième propriétés des intégrales, ceci est égal à

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{-\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz.$$

Ensuite, g est une primitive de f . En fait, si \tilde{w} est proche de w tel que $[w, \tilde{w}] \subset U$,

$$g(\tilde{w}) = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{[w, \tilde{w}]} f(z) dz \Rightarrow g(\tilde{w}) - g(w) = \int_{[w, \tilde{w}]} f(z) dz.$$

On conclut comme auparavant, en utilisant la continuité de f que

$$\lim_{\tilde{w} \rightarrow w} \frac{g(\tilde{w}) - g(w)}{\tilde{w} - w} = f(w).$$

\square

Remarque 3.39. En d'autres termes, la proposition 3.38 nous indique que pour toute fonction f continue sur un domaine $U \subseteq \mathbb{C}$, f admet une primitive si et seulement si l'intégrale de f est indépendante du chemin (tant qu'ils soient C par morceaux).

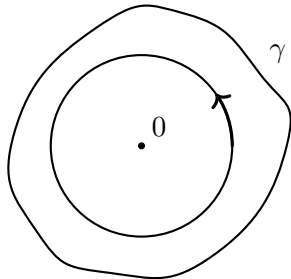
Exemple 3.40. Soit $U = \mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$. Soit $f(z) = \frac{1}{z}$ holomorphe sur \mathbb{C}_- . Remarquons que \mathbb{C}_- est étoilé, et donc

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0, \quad \text{pour tout lacet } \gamma.$$

Il existe donc une primitive de f sur \mathbb{C}_- , $\int_1^z f(w) dw$ (nous pouvons prendre le chemin en ligne droite entre 1 et z comme 1 est un point "étoilé" de \mathbb{C}_-). Nous notons g sa primitive.

Donc $g'(z) = \frac{1}{z}$, nous savons que si nous posons $\log z = \log r + it$, où $z = re^{it}$, $t \in (-\pi, \pi)$, nous avons aussi $(\log z)' = \frac{1}{z}$, et $\log 1 = 0$, et $\int_1^1 f(w) dw = 0 \Rightarrow (g(z) - \log(z))' = 0$, et $g(1) - \log 1 = 0$ donc $g(z) = \log(z)$.

Exemple 3.41. $\gamma : t \mapsto e^{2\pi it}, t \in [0, 1]$



$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Remplaçons γ par un $\tilde{\gamma} : t \mapsto e^{2\pi int}, n \in \mathbb{Z}$.

$$\int_{\tilde{\gamma}} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi int}} 2\pi i n e^{2\pi int} dt = 2\pi i \cdot n.$$

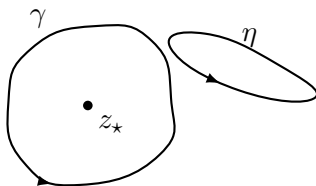
Donc $\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{dz}{z} = n$, autrement dit l'intégrale mesure combien de fois $\tilde{\gamma}$ fait le tour de l'origine.

Soit $z_* \in \mathbb{C}$, et soit $\gamma : [s, t] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_*\}$ un lacet. Nous pouvons généraliser l'intégrale ci-dessus et considérer

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_*}.$$

Lemme 3.42. La quantité ci-dessus est un entier $n \in \mathbb{Z}$ que nous appelons l'indice de γ par rapport à z_* .

Démonstration.



Soit $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{z_*\}$, la fonction $h(z) = \frac{1}{z - z_*}$ est holomorphe sur U . Par la connexité simple de U , h admet une primitive $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ (cf 3.37) définie par $g(z) = \int_p^z \frac{dw}{w - z_*}$, où l'intégrale ne dépend pas du chemin (dans U).

Considérons maintenant la fonction $f(z) = e^{g(z)}$, elle est holomorphe car il s'agit de la composition de fonctions holomorphes. Par la règle de la chaîne, nous trouvons

$$\begin{aligned} (e^{g(z)})' &= g'(z) \cdot e^{g(z)} = \frac{1}{z - z_*} \cdot e^{g(z)} \\ \implies f'(z) &= \frac{1}{z - z_*} f(z) \implies \left(\frac{f(z)}{z - z_*} \right)' = \frac{1}{z - z_*} \left(f'(z) - \frac{f(z)}{z - z_*} \right) = 0 \\ \implies f(z) &= C \cdot (z - z_*), \quad C = cte \neq 0. \end{aligned}$$

Sur chaque disque simplement connexe $D \subseteq \mathbb{C} \setminus \{z_*\}$,

$$e^{\int_p^z \frac{dw}{w - z_*}} = C_D (z - z_*), \tag{3.2}$$

où $C_D \neq 0$ dépend de D et du point de base $p \in D$ (mais pas de z).

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_\star\}$ un lacet. Par compacité de $\gamma([s, t])$ nous choisissons N points z_1, z_2, \dots, z_N sur la trajectoire tels que pour chaque paire consécutive, z_j, z_{j+1} (incluant $\{z_N, z_1\}$), il existe un disque $\mathbb{C} \setminus \{z_\star\} \supset D(p_j, \rho_j) \supset \{z_j, z_{j+1}\}$. En d'autres termes, nous avons utilisé la compacité de l'image du lacet, pour extraire un ensemble fini d'ouverts recouvrant le lacet, et nous avons sélectionné N points du lacet, 1 pour chaque ouvert. Notons γ_j le segment de γ qui relie z_j à z_{j+1} à l'intérieur du disque $D(p_j, \rho_j)$. Sur chacun de ces disques, nous fixons le point de base p_j , et par 3.2,

$$e^{\int_{p_j}^z \frac{dw}{w-z_\star}} = C_j(z - z_\star), \quad (z \in D(p_j, \rho_j)) \quad (3.3)$$

avec $C_j \neq 0$. Considérons le petit lacet ζ_j dans $D(p_j, \rho_j)$ obtenu en concaténant le segment droit $[p_j, z_j]$, γ_j , puis $[z_{j+1}, p_j]$. Comme $\frac{1}{w-z_\star}$ est holomorphe sur $D(p_j, \rho_j)$ qui est simplement connexe, nous avons par 3.36 que

$$\begin{aligned} \int_{\zeta_j} \frac{dw}{w-z_\star} &= 0 \\ \implies \int_{\gamma_j} \frac{dw}{w-z_\star} &= \int_{p_j}^{z_{j+1}} \frac{dw}{w-z_\star} - \int_{p_j}^{z_j} \frac{dw}{w-z_\star}, \\ \implies \exp \int_{\gamma_j} \frac{dw}{w-z_\star} &= \frac{\exp \int_{p_j}^{z_{j+1}} \frac{dw}{w-z_\star}}{\exp \int_{p_j}^{z_j} \frac{dw}{w-z_\star}} = \frac{C_j(z_{j+1} - z_\star)}{C_j(z_j - z_\star)} = \frac{z_{j+1} - z_\star}{z_j - z_\star}. \end{aligned}$$

Comme $\gamma = \bigoplus_{j=1}^N \gamma_j$,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z_\star} &= \sum_{j=1}^N \int_{\gamma_j} \frac{dw}{w-z_\star} && \text{par 3.2} \\ \exp \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z_\star} &= \prod_{j=1}^N \exp \int_{\gamma_j} \frac{dw}{w-z_\star} \\ &= \prod_{j=1}^N \frac{z_{j+1} - z_\star}{z_j - z_\star}. \end{aligned}$$

Où $z_{N+1} = z_1$, donc lorsque nous calculons le produit, nous obtenons 1. Ainsi,

$$\exp \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z_\star} = 1 \implies \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z_\star} = 2\pi i \cdot n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

□

Remarque 3.43. Soit $U \subseteq \mathbb{C}^*$ un domaine, et soit $z_\star \in U$. Considérons la fonction $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = \int_{z_\star}^z \frac{dw}{w}.$$

Comme dit précédemment, elle est bien définie car l'intégrale est indépendante du chemin,

$$\exp \int_{z_\star}^z \frac{dw}{w} = C \cdot z$$

Comme calculé précédemment dans la preuve. En particulier, en évaluant à gauche et à droite en $z = z_\star$, nous trouvons $e^0 = 1 = C \cdot z_\star$, donc $C = \frac{1}{z_\star}$. Nous aimerions maintenant ne plus avoir cette constante $\frac{1}{z_\star}$. Pour ce faire, nous introduisons la fonction

$$L(z) = \int_{z_\star}^z \frac{dw}{w} + w_\star,$$

où w_* est tel que $\exp\left(\int_{z_*}^z \frac{dw}{w} + w_*\right) = \frac{z}{z_*} \cdot e^{w_*}$, avec $e^{w_*} = z_*$. C'est toujours possible par la surjectivité de $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ (mais attention, la préimage de z_* est déterminée à $2\pi i\mathbb{Z}$ près). On appelle L une branche de logarithme sur U , et nous obtenons bien que $\exp L(z) = z, \forall z \in U$. Si nous avons choisi un autre élément de la préimage, $w'_* = w_* + 2\pi ik$, alors nous aurions obtenu une autre branche : $L_k(z) = L(z) + 2\pi ik$.

Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, nous définissons sur U :

$$z^\alpha := e^{\alpha L(z)}.$$

Nous remarquons alors que cette définition dépend du choix de la branche de logarithme, si nous échangeons $L(z)$ par $L_k(z)$, alors $(\bullet^\alpha)_k(z) = e^{\alpha L_k(z)} = e^{\alpha L(z)} e^{2\pi ik\alpha}$. La dépendance du choix est donc capturée dans la constante $e^{2\pi ik}$. Plusieurs conséquences en découlent, de manière immédiate, si $\alpha \in \mathbb{Z}$, alors $e^{2\pi ik\alpha} = 1$ pour tout k , la puissance z^α est bien définie indépendamment de la branche choisie. Si $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (écrite sous forme de fraction irréductible, $q > 0$), alors $e^{2\pi ik\alpha} = e^{2\pi ikp/q}$ prend exactement q valeurs distinctes (les q -ièmes racines de l'unité), nous obtenons alors exactement q branches distinctes sur U nous permettant de définir z^α , qui diffèrent toutes par un facteur $e^{2\pi i/q}$. Si maintenant $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, nous avons une infinité dénombrable de branches distinctes pour définir z^α (dénombrable car toutes les branches varient d'un facteur $2\pi ik$).

Chapitre 4

Théorème de Cauchy et analyticité des fonctions holomorphes

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction qui est holomorphe en tout point dans U , et soit $z \in U$. Soit $\gamma : [s, t] \rightarrow U \setminus \{z\}$. Supposons qu'il existe une homotopie dans $U \setminus \{z\}$ entre γ et un lacet circulaire $\partial D(z, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, paramétrisé par $t \mapsto z + \varepsilon e^{2\pi i t}$. Nous excluons le lacet constant z , ce qui est important pour la suite.

Théorème 4.1 (Cauchy). *Soient $U \subset \mathbb{C}$, f , γ et $\partial D(z, \varepsilon)$ comme décrits ci-dessus. Alors,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Remarque 4.2. Les valeurs de f sur γ déterminent f dans tout le domaine U . C'est vrai pour une fonction holomorphe en tout point, mais pas forcément pour toute fonction C^∞ .

Démonstration. La fonction

$$z \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

est holomorphe sur $U \setminus \{z\}$, et par la proposition de l'invariance de l'intégrale sous homotopie (3.38), nous nous réduisons à

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \int_{\partial D(z, \varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

Pour $0 < \delta < \varepsilon$ suffisamment petit, nous avons $\overline{D(z, \delta)} \subset D(z, \varepsilon) \subset U$. Les cercles $\partial D(z, \delta)$ et $\partial D(z, \varepsilon)$ sont eux-mêmes homotopes dans $U \setminus \{z\}$. Donc, encore par invariance sous homotopie,

$$\int_{\partial D(z, \delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \int_{\partial D(z, \varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}.$$

En particulier, en prenant la limite quand $\delta \rightarrow 0$,

$$\int_{\partial D(z, \varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial D(z, \delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

Posons $g(z, \zeta) := f(\zeta) - f(z)$. Comme f est continue en z (même holomorphe), nous avons $\max_{|\zeta - z| = \delta} |g(z, \zeta)| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$. Ainsi,

$$\int_{\partial D(z, \delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial D(z, \delta)} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta \tag{4.1}$$

$$+ \int_{\partial D(z, \delta)} \frac{g(z, \zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{4.2}$$

Pour calculer 4.1, nous paramétrons $\zeta(t) = z + \delta e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, alors $d\zeta = i\delta e^{it} dt$ et $\zeta - z = \delta e^{it}$.

$$4.1 = f(z) \int_0^{2\pi} \frac{i\delta e^{it}}{\delta e^{it}} dt = f(z) \cdot 2\pi i.$$

Pour 4.2,

$$4.2 \leq \max_{\partial D(z, \delta)} \left| \frac{g(z, \zeta)}{\zeta - z} \right| \ell(\partial D(z, \delta)) \leq \max_{\partial D(z, \delta)} |g(z, \zeta)| \frac{1}{\delta} 2\pi\delta = 2\pi \cdot \max_{\partial D(z, \delta)} |g(z, \delta)| \xrightarrow{\delta \downarrow 0} 0.$$

Nous pouvons alors conclure que

$$\int_{\partial D(z, \delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = f(z) \cdot 2\pi i \implies f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}.$$

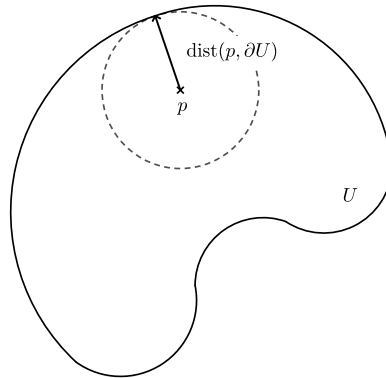
□

Théorème 4.3. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe en tout $p \in U$, alors la fonction est analytique. En particulier, elle est C^∞ , et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe.

Plus précisément, si $p \in U$, où la représentation de f en série de puissances autour de p est donnée par

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - p^n),$$

le rayon de convergence de la série est au moins égal à la $\text{dist}(p, \partial U)$.



Démonstration. Soient $z \in U$, $\rho' < \rho := \text{dist}(z, \partial U)$ et $\overline{D(z, \rho')} \subset U$, alors, d'après le théorème de Cauchy appliqué à $\partial D(z, \rho')$, on peut réécrire la fonction $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z, \rho')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. De plus, si on perturbe z en prenant z' , on a encore

$$f(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z', \rho')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'} d\zeta \quad (4.3)$$

En fait, ceci est correct pour tout $z' \in D(z, \rho')$. On utilisera 4.3 pour développer la fonction en série de puissances.

Il suffit de développer la fonction $\frac{1}{\zeta - z'}$ en série de puissances centrée en z . Pour cela, on écrit $\frac{1}{\zeta - z'} = \frac{1}{\zeta - z - (z' - z)}$, où, d'après le choix de z' , on a $\rho' = |\zeta - z| > |z' - z|$ uniformément en ζ . On peut alors écrire $\frac{1}{\zeta - z - (z' - z)} = \frac{1}{(\zeta - z)(1 - \frac{z' - z}{\zeta - z})}$, et, comme $\frac{|z' - z|}{|\zeta - z|} = \frac{|z' - z|}{\rho'} < 1$, on a que $\frac{1}{(\zeta - z)(1 - \frac{z' - z}{\zeta - z})} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z' - z}{\zeta - z} \right)^n$ est une somme infinie qui converge absolument et localement

uniformément en $z' \in D(z, \rho')$.

En utilisant ce résultat avec 4.3, on déduit que

$$\begin{aligned}
f(z') &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z, \rho')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z, \rho')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z - (z' - z)} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z, \rho')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z) \left(1 - \frac{z' - z}{\zeta - z}\right)} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z, \rho')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} \frac{1}{\left(1 - \frac{z' - z}{\zeta - z}\right)} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z, \rho')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} \left(\sum_{n \geq 0} \left(\frac{z' - z}{\zeta - z} \right)^n \right) d\zeta
\end{aligned}$$

Ici, on peut changer l'ordre de sommation et d'intégration grâce à la convergence absolue et uniforme, alors

$$\begin{aligned}
f(z') &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z, \rho')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} \left(\sum_{n \geq 0} \left(\frac{z' - z}{\zeta - z} \right)^n \right) d\zeta \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z, \rho')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} \left(\frac{z' - z}{\zeta - z} \right)^n d\zeta \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z, \rho')} \frac{(z' - z)^n f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \\
&= \sum_{n \geq 0} (z' - z)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z, \rho')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta
\end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$f(z') = \sum_{n \geq 0} a_n (z' - z)^n, \quad a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z, \rho')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

□

Exemple 4.4. La fonction $f(z) = \frac{1}{1+x^2}$ converge sur tout \mathbb{R} mais elle a un rayon de convergence égal à 1 dans \mathbb{C} .

Remarque 4.5. Si f est holomorphe en tout $p \in U$, alors f est analytique, en particulier, on peut dire que $f \in C^\infty$ et donc infiniment dérivable au sens complexe. Ceci est vrai car, si $g(z)$ est analytique autour de $z = 0$ avec $g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ avec $a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$, on a alors la conclusion suivante $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D(z, \rho')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$

Proposition 4.6. Soient $U \subseteq \mathbb{C}$, un domaine et $f \in C^0(U)$. Supposons que f admette une primitive, alors f est holomorphe.

Démonstration. Comme il existe F , la primitive de f , par définition F est holomorphe donc infiniment dérivable. Sachant que $f = F'$, on sait que f doit également être infiniment dérivable et donc holomorphe. □

Remarque 4.7. En fait, toutes les implications de cette preuve sont des équivalences, la réciproque est alors également valable.

Théorème 4.8 (Théorème de Morera). *Soit $U \subseteq \mathbb{C}$, un domaine, $f \in C^0(U)$. Alors, f est holomorphe si et seulement si*

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0 \quad (4.4)$$

pour tout lacet contractible.

Démonstration. \implies Si f est holomorphe, on a que f admet une primitive. De fait, on sait que, sur tout lacet fermé, on a 4.4 = 0

\Leftarrow On note qu'il suffit de montrer l'holomorphie de f sur chaque disque $D(p, \delta) \subset U$. On suppose que $\int_{\gamma} f(w) dw = 0$ pour tout lacet. Si on restreint $z \in D(p, \delta) \subset U$, on peut introduire $F(z) = \int_p^z f(w) dw$. Comme $\int_{\gamma} f(w) dw = 0$ pour tout lacet, l'intégrale ne dépend pas du chemin donc F est bien définie. Alors, $F'(z) = f(z)$ et f admet une primitive. Par la proposition précédente, on conclut que f est holomorphe. \square

Théorème 4.9. *Soit $U \subseteq \mathbb{C}$, un domaine et soient $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphes. Si $A = \{z \in U \mid f(z) = g(z)\}$ admet un point d'accumulation dans U , alors, $f = g$.*

Démonstration. Comme ceci est vrai pour les fonctions analytiques et que toute fonction holomorphe est analytique, le résultat est direct \square

Remarque 4.10 (Attention). Certaines fonctions admettent des points d'accumulation qui ne sont pas comprises dans le domaine de définition. Par exemple, la fonction $f(z) = \sin(\frac{1}{z})$ définie sur \mathbb{C}^* admet $\{0\}$ comme point d'accumulation pour ses 0 mais, $\{0\} \notin \mathbb{C}^*$ de fait, f n'est pas la fonction constante à 0, malgré les points d'accumulation.

Théorème 4.11 (Inégalité de Cauchy). *Soient $U \subseteq \mathbb{C}$, un domaine, $p \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et $r > 0$ tel que $\overline{D(p, r)} \subset U$. Alors, si $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - p)^n$, on a que $|a_n| \leq r^{-n} \cdot \max_{\partial D(p, r)} |f(\zeta)|$ et $|f^{(n)}(p)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \max_{\partial D(p, r)} |f(\zeta)|$*

Démonstration. On vient de dériver la formule $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(p, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - p)^{n+1}} d\zeta \iff f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D(p, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - p)^{n+1}} d\zeta$. D'après la cinquième propriété des intégrales, on a

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{1}{2\pi i} \max_{\zeta \in \partial D(p, r)} \left(\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - p|^{n+1}} \right) \ell(\partial D(p, r)) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \max_{\zeta \in \partial D(p, r)} \left(\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - p|^{n+1}} \right) 2\pi r i \\ &= \frac{1}{2\pi i} \max_{\zeta \in \partial D(p, r)} \left(\frac{|f(\zeta)|}{r^{n+1}} \right) 2\pi r i \\ &= \frac{1}{2\pi i} r^{-n-1} \cdot \max_{\zeta \in \partial D(p, r)} (|f(\zeta)|) 2\pi i \cdot r \\ &= r^{-n} \cdot \max_{\zeta \in \partial D(p, r)} |f(\zeta)| \end{aligned}$$

\square

Définition 4.12. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, si f est holomorphe, on dit que f est entière.

Exemple 4.13. Les polynômes et les fonctions trigonométriques sont entières, la fonction $f(z) = \frac{1}{1+z}$ ne l'est pas

Théorème 4.14 (Liouville). *Toute fonction entière et bornée est constante*

Démonstration. On utilise les inégalités de Cauchy. En prenant le cas $n = 1$, on sait que $\forall z \in \mathbb{C}, \forall r > 0$ tel que

$$|f'(z)| \leq r^{-1} \max_{\partial D(z,r)} |f(\zeta)| \leq r^{-1}C$$

Pour une constante C indépendante de r qui existe forcément car $f(\zeta)$ est bornée sur \mathbb{C} par hypothèse. En laissant $r \rightarrow \infty$, on conclut que $|f'(z)| = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ alors, nécessairement, $f(z)$ est constante. \square

Remarque 4.15. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est bornée pourvu qu'il existe une constante C telle que $|f(z)| \leq C$ pour tout $z \in \mathbb{C}$

Corollaire 4.16 (Théorème fondamental de l'algèbre). *Tout polynôme non constant $p(z)$ avec coefficients complexes admet au moins une racine en \mathbb{C} .*

Démonstration. Supposons, par absurde, que $p(z)$ est un polynôme non constant sans racine en \mathbb{C} . On sait déjà que $\lim_{z \rightarrow \infty} |p(z)| = +\infty$, alors, il existe $R > 0$ tel que, si $|z| > R$, alors, $|p(z)| > 1$. Ensuite, on restreint $z \in \overline{D(0, R)}$ et $|p(z)| \geq \delta > 0$ pour un $\delta > 0$ adéquat. Ensuite, la fonction $f(z) := \frac{1}{p(z)}$ est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ et est entière, et, on a $|f(z)| \leq \frac{1}{\delta}$ si $z \in \overline{D(0, R)}$ et $|f(z)| \leq 1$ si $z \in \overline{D(0, R)}^c$ donc f est entièrement bornée et constante, donc, $p(z)$ est constante. \square

Proposition 4.17. *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et non constante. Alors f est une application ouverte :*

$$\forall V \subset U \text{ ouvert, } f(V) \text{ ouvert.}$$

Remarque 4.18. si $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors f n'est pas ouverte. Par exemple : $V = (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, alors $f(V) = [0, \delta^2)$ qui est un intervalle demi-ouvert mais pas ouvert.

Lemme 4.19. *Si $k \in \mathbb{N}^*$, alors $f(z) = z^k$ est une application ouverte.*

Démonstration. Soit $V \subset \mathbb{C}$ un ouvert, montrons que $f(V)$ est ouvert. Pour ceci, il suffit d'exhiber que pour tout $p \in V$, il existe un disque $D(p, \delta) \subset V$, avec $\delta > 0$ tel que $f(D(p, \delta))$ est ouvert. Alors $f(V) = \bigcup_{p \in V} f(D(p, \delta))$ est ouvert.

Si $p \in V \setminus \{0\}$, alors $f'(p) = k \cdot p^{k-1} \neq 0$. Alors il existe un $V_1 \ni p$ (voisinage ouvert), tel que

$$f|_{V_1} : V_1 \rightarrow f(V_1) = V_2$$

est un difféomorphisme, avec V_2 ouvert.

Si $p = 0$, alors si on pose $D(0, \delta)$, $f(D(0, \delta)) = D(0, \delta^k)$, donc ouvert, ce qui conclut la preuve du lemme. \square

Démonstration de la proposition 4.17. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, non constante. Soit $V \subset U$ ouvert.

On veut montrer que $f(V)$ est ouvert. Pour ceci, il suffit d'exhiber $\forall p \in V$ il existe un disque, $D(p, \delta)$, $\delta > 0$ tel que $f(D(p, \delta))$ est ouvert.

Pour une question de simplicité, posons $p = 0$. Par analyticité de f , on peut développer f en série de puissances autour de p : $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, et comme f n'est pas constant, il existe $k \geq 1$ avec $a_k \neq 0$ (comme U est un domaine, si f est localement constante, alors f est globalement constante, c'est un corollaire du théorème 4.9). Posons $k = \arg \min_{k \in \mathbb{N}^*} \{a_k \neq 0\}$. Si on remplace $f(z) \rightarrow f(z) - a_0$, il suffit de montrer que la deuxième application est ouverte, et

$$f(z) - a_0 = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots = z^k \sum_{n \geq k} a_n \cdot z^{n-k} = \left[z \cdot \sqrt[k]{\sum_{n \geq k} a_n z^{n-k}} \right]^k,$$

où la série converge sur $D(0, \delta)$, avec $\delta > 0$ suffisamment petit. En observant que la fonction $h(z) := \sum_{n \geq k} a_n \cdot z^{n-k}$ admet une k -ième dérivée holomorphe sur un disque $D(0, \tilde{\delta})$ avec $\tilde{\delta} > 0$ suffisamment petit (car $a_k \neq 0$). Alors $h(0) = a_k \neq 0$. Par continuité de h sur $D(0, \delta)$, il existe $\tilde{\delta} > 0$ tel que $h(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(0, \tilde{\delta})$. Alors $h'(z)/h(z)$ sur $D(0, \tilde{\delta})$ est holomorphe. Si on pose $g(z) = \int_0^z \frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)} d\zeta$, $z \in D(0, \tilde{\delta})$ est égale à $\log g(z)$ à une constante près. Alors $e^{g(z)} = C \cdot h(z)$ pour une constante $C \in \mathbb{C}^*$ adéquate. Ensuite $e^{\frac{1}{k}g(z)}$ est une k -ième racine holomorphe de $h(z)$ sur $D(0, \tilde{\delta})$ à une constante près. Alors

$$\begin{aligned} \exists \tilde{h} : D(0, \tilde{\delta}) \rightarrow \mathbb{C}^* \text{ telle que } & \begin{cases} \tilde{h} \text{ est holomorphe,} \\ \tilde{h} = h^k. \end{cases} \\ \implies f(z) - a_0 = [z \cdot \tilde{h}(z)]^k, & \end{aligned}$$

pourvu que $z \in D(0, \tilde{\delta})$, avec $\tilde{\delta} > 0$ suffisamment petit. Ensuite on finit la démonstration comme suit :

1. Considérons l'application $\phi(z) := z \cdot \tilde{h}(z)$, $z \in D(0, \tilde{\delta})$. Notons que c'est un difféomorphisme locale autour de $z = 0$. Pour ceci, d'après un théorème précédent du cours, il suffit de montrer que

$$\begin{aligned} \phi'(0) \neq 0 : \phi'(z) &= \frac{d}{dz}[z \cdot \tilde{h}(z)]|_{z=0} \\ &= \tilde{h}(0) = \sqrt[k]{a_k} \neq 0. \end{aligned}$$

Donc en conséquence il existe $D(0, \delta_1)$, $\delta_1 > 0$ tel que $\phi : D(0, \delta_1)$ est ouvert.

2. Ensuite : $(f - a_0)(D(0, \delta_1)) = \psi(\phi(D(0, \delta_1)))$ où $\psi(z) = z^k$. D'après le lemme, ψ est ouvert, et donc $\psi(\phi(D(0, \delta_1)))$ est aussi ouvert. \square

4.1 Principe du maximum pour fonctions holomorphes

Proposition 4.20. *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Supposons que $p \in U$ est un maximum local pour f . Alors f est constante.*

Remarque 4.21. On appelle $p \in U$ un maximum local de f , pourvu qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $|f(p)| \geq |f(z)|$, $\forall z \in D(p, \delta)$. On définit le minimum local d'une fonction de manière analogue.

Démonstration. Supposons par l'absurde que f admet un maximum local $p \in U$ mais est non constante. D'après la proposition 4.17, f est ouverte : pour n'importe quel voisinage ouvert $V \ni p \subset U$, l'image est ouverte. Comme p est supposé être un maximum local, il existe un $\delta > 0$ tel que $|f(z)| \leq |f(p)|$, $\forall z \in D(p, \delta)$. L'image de $D(p, \delta)$ par f étant ouverte, et comme $f(p) \in f(D(p, \delta))$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $D(f(p), \varepsilon) \subset f(D(p, \delta))$. Ainsi, il existe $w \in f(D(p, \delta))$ avec $|w| > |f(p)|$. Donc, il existe un $\tilde{w} \in D(p, \delta)$ tel que $f(\tilde{w}) = w$, autrement dit, $|f(\tilde{w})| > |f(p)|$, ce qui contredit la maximalité de f en p dans $D(p, \delta)$. \square

Remarque 4.22. L'existence d'un tel w est une conséquence géométrique de l'ouverture de $f(D(p), \delta)$: Comme $D(f(p), \varepsilon) \subset f(D(p), \delta)$, alors en prenant par exemple $w = (|f(p)| + \varepsilon/2) \cdot \frac{f(p)}{|f(p)|}$. On remarque alors que $w \in D(f(p), \varepsilon)$ et $|w| > |f(p)|$.

Remarque 4.23. Si $U \subset \mathbb{C}$ un domaine, et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, alors si f admet un minimum local non nul ($\iff p \in U$, $f(p) \neq 0$, tel que $\exists \delta > 0$, $\forall z \in D(p, \delta)$, $|f(p)| \leq |f(z)|$) ; alors f est constante.

Proposition 4.24. *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine borné ($\exists K \in \mathbb{R}_+$, $|z| \leq K$, $\forall z \in U$). Supposons que $f \in C^0(\bar{U})$ et holomorphe en U . Alors f atteint son maximum sur ∂U . Si $f \neq 0$, alors f atteint son minimum sur ∂U .*

Démonstration. Comme \bar{U} est compact, et $f \in C^0(\bar{U})$, alors f atteint son maximum et minimum sur \bar{U} . Si $p \in U$ est tel que $|f(p)| = \max_{z \in \bar{U}} |f(z)|$, d'après la proposition 4.20, f est constante. Alors on a que $f(\tilde{p}) = f(p)$, $\forall p \in \partial U$. Si f est non constante, le maximum n'est pas atteint en U , donc nécessairement sur ∂U . \square

Chapitre 5

Singularités des fonctions holomorphes

Exemple 5.1. Soit $f(z) = z^{-n}$, pour $n = 1, 2, \dots$, $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe, mais $\lim_{z \rightarrow 0} |f(z)| = +\infty$, alors 0 est un pôle de f .

Théorème 5.2 (Riemann). Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine, $p \in U$, et supposons que $f : U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe. Supposons de plus que f soit bornée autour de p . Alors il existe une prolongation de f à U , $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$, holomorphe et qui coïncide avec f sur $U \setminus \{p\}$.

Remarque 5.3. On dit que f est bornée autour de p s'il existe $\delta > 0$ tel que la restriction $f|_{D(p, \delta) \setminus \{p\}}$ est bornée, c-à-d, $\exists K \in \mathbb{R}_+$ t.q. $|f(z)| \leq K \forall z \in D(p, \delta) \setminus \{p\}$, alors on appelle p une singularité effaçable.

Démonstration. On peut directement supposer $p = 0$ puis introduire la fonction suivante

$$g(z) : \begin{array}{l} U \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \begin{cases} z^2 \cdot f(z) & \text{si } z \in U \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases} \end{array}$$

On voit que cette fonction est bien définie sur tout U et on va montrer qu'elle est holomorphe.

Si $z \in U \setminus \{0\}$, ceci est clair car il s'agit du produit de 2 fonctions holomorphes qu'on sait être holomorphe.

Si $z = 0$, on peut écrire

$$\lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ w \neq 0}} \frac{g(w) - g(0)}{w - 0} = \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ w \neq 0}} \frac{w^2 f(w) - 0}{w} = \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ w \neq 0}} w f(w)$$

Comme f est bornée autour de 0, il existe un $\delta > 0$, $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall z \in D(0, \delta) \setminus \{0\}$, $|f(z)| < K$. Donc, $|w f(z)| < |w|K \xrightarrow{w \rightarrow 0} 0$. Ainsi,

$$\lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ w \neq 0}} w f(w) = 0.$$

Nous avons donc bien montré que g est holomorphe.

De fait, on sait également que g est analytique et, en particulier, on peut écrire

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \quad z \in D(0, \delta), \quad \delta > 0$$

Ici, on sait que les 2 premiers coefficients a_0 et a_1 sont nuls (car $g(0) = g'(0) = 0$), on peut donc réécrire

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n = z^2 \cdot \sum_{n \geq 2} a_n z^{n-2}$$

On sait alors que $f(z) = \sum_{n \geq 2} a_n z^{n-2}$ pour $z \in D(0, \delta) \setminus \{0\}$ et on peut poser $\tilde{f}(0) = a_2$.

Ceci nous donne le prolongement analytique / holomorphe de f à U . \square

Remarque 5.4. Dans \mathbb{R} et pour $C^\infty(\mathbb{R})$, ce théorème n'est pas vrai en général. La fonction $f(x) = |x| : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée autour de $x = 0$ mais ne peut pas être prolongée de manière à être C^1 .

Une application du théorème de Riemann est la proposition suivante :

Proposition 5.5 (Cauchy généralisé). *Soit $U \subset \mathbb{R}$ un domaine, $\gamma \subset U$, un lacet contractible dans U et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe.*

Alors, pour $z \in U \setminus \{\gamma\}$, on a

$$f(z) \cdot \text{ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Ici, $\text{ind}(\gamma, z)$ est la fonction indice qui mesure le nombre de tours qu'effectue un lacet γ autour d'un point z .

Démonstration. Commençons par introduire la fonction $g_z(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$ pour $\zeta \in U \setminus \{z\}$. Comme $g_z(\zeta)$ est bornée autour de z , on peut la prolonger de manière holomorphe en $\zeta = z$ et on a $\lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = f'(z)$. On effectue alors les opérations suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} g_z(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ 0 &= \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \underbrace{\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z}}_{2\pi i \cdot \text{ind}(\gamma, z)} \\ \implies 2\pi i \cdot \text{ind}(\gamma, z) f(z) &= \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ \implies \text{ind}(\gamma, z) \cdot f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \end{aligned}$$

\square

Après avoir montré que certaines singularités étaient effaçables, il est bon de rappeler qu'il en existe également qui sont de "vraies" singularités .

Exemple 5.6. Les fonctions $\frac{1}{z}, \frac{1}{z^k}, k \in \mathbb{N}^*, p(\frac{1}{z})$ où p est un polynôme non constant, $e^{\pm 1/z} = \sum_{n \geq 0} (\pm \frac{1}{z})^n, z \in \mathbb{C}^*$ sont toutes des exemples de "vraies" singularités où $f(z)$ n'est pas bornée autour de la singularité.

En reprenant la dernière fonction utilisée dans l'exemple, on remarque que la notation $\sum_{n \geq 0} (\frac{1}{z})^n$ est similaire à celle des séries entières, on va alors introduire une nouvelle notation pour traiter ce genre de cas de manière analogue.

5.1 Séries de Laurent

Définition 5.7 (Série de Laurent). Soit un ensemble de valeurs indexées $\{a_k \in \mathbb{C} : k \in \mathbb{Z}\}$, on appelle série de Laurent la somme suivante

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$$

Et on parle de série de Laurent centrée en $z_* \in \mathbb{C}$ pour $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_*)^k$

Définition 5.8 (Convergence de série de Laurent). On dit que $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$ converge en $z \in \mathbb{C}^*$ pourvu que

- $\sum_{n \geq 0}^{+\infty} a_n z^n$ (appelée partie régulière) converge
- $\sum_{n \geq 1}^{+\infty} a_{-n} w^n$ avec $w = \frac{1}{z}$ (appelée partie singulière ou principale) converge

Et on définit la valeur de $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$ comme la somme de ces 2 séries.

Pour déterminer la région maximale où on peut évaluer $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$, on doit prendre l'intersection des régions où la partie régulière et singulière convergent.

La partie régulière converge normalement en

$$z \in D(0, R), \quad R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, \infty]$$

où on ne considérera que les cas où $R > 0$.

La partie singulière converge normalement en

$$w \in D(0, r^{-1}), \quad r^{-1} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}} \in [0, \infty]$$

Remarquons que $r^{-1} \in [0, \infty] \iff r \in [0, \infty]$ c-à-d $w \in D(0, r^{-1}) \iff \frac{1}{z} \in D(0, r) \iff |z| > r$

Définition 5.9. Pour $0 \leq r < R \leq \infty$, on appelle la région $A(z_*, r, R) = \{z \in \mathbb{C}, r < |z - z_*| < R\}$ un anneau centré en z_* de rayons r, R

Définition 5.10. Soit $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$ une série de Laurent et supposons que R et r^{-1} comme définis plus haut satisfont $0 \leq r < R \leq \infty$. Alors, on appelle $A(0, r, R)$ l'anneau de convergence de la série de Laurent.

Exemple 5.11. Par exemple, pour la fonction $\frac{1}{z} + \sum_{n \geq 0} z^n$, l'anneau de convergence est $A(0, 0, 1)$ pour la fonction $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$, on a $A(0, 0, \infty)$ comme anneau de convergence

Proposition 5.12. Soit $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$, une série de Laurent avec anneau de convergence $U = A(0, r, R)$, $0 \leq r < R \leq \infty$. Alors, la série converge normalement sur U vers une fonction holomorphe dont les dérivées peuvent être calculées en dérivant formellement terme à terme.

Preuve de la différentiation. En considérant la fonction $f(z)$ comme la valeur de la série en z , on peut écrire

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n \geq 1} a_{-n} w^n, \quad w = \frac{1}{z}$$

On peut alors définir les 2 fonctions suivantes

$$\begin{aligned} f_1(z) &:= \sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad \text{converge sur } D(0, R) \\ f_2(z) &:= \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} w^n \Big|_{w=\frac{1}{z}} =: g_2\left(\frac{1}{z}\right), \quad \text{avec} \\ g_2(w) &:= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n \end{aligned}$$

On voit alors directement

$$\begin{aligned} f'_2(z) &= g'_2\left(\frac{-1}{z^2}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n \frac{1}{z^{n-1}}\right) \left(\frac{-1}{z^2}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(-n) \frac{1}{z^{n+1}} \end{aligned}$$

La fonction est donc bien différentiable □

Remarque 5.13. Pour la suite, il est bien de rappeler que $D(0, \delta) \setminus \{0\} = A(0, 0, \delta)$. Ceci nous permettra d'avoir une meilleure compréhension des singularités.

Notre prochain objectif est de savoir s'il est possible de représenter les fonctions holomorphes définies sur des anneaux comme des série de Laurent. Nous allons voir que ceci est effectivement possible à l'aide d'une nouvelle version du théorème de Cauchy.

Proposition 5.14. Soit $U \subset \mathbb{C}$, un domaine et soit $0 < r < R < \infty$ tels que $\overline{A(0, r, R)} \subset U$, l'anneau fermé compris dans U .

Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe et $z \in A(0, r, R)$, alors,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Démonstration. Considérons la fonction $g_z(\zeta) := \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$, holomorphe en $A(0, r, R) \setminus \{z\}$. On se rappelle que cette fonction est bornée autour de z et donc qu'elle est prolongeable de manière holomorphe en 0 .

Ensuite, utilisons cette nouvelle fonction g_z :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, R)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, r)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, R)} g_z(\zeta) d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, r)} g_z(\zeta) d\zeta = 0 \end{aligned}$$

Où on justifie l'égalité à 0 par le fait que les chemins $\partial D(0, r)$ et $\partial D(0, R)$ sont homotopes au sens de topologie, alors $\int_{\partial D(0, R)} g_z(\zeta) d\zeta = \int_{\partial D(0, r)} g_z(\zeta) d\zeta$. De fait, on a que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, R)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, r)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, R)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(0, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, R)} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta}_{f(z) \cdot \text{ind}(\partial D(0, R), z)} \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, r)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, r)} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta}_{f(z) \cdot \text{ind}(\partial D(0, r), z)} \end{aligned}$$

Or on voit directement $\text{ind}(\partial D(0, R), z) = 1$ et $\text{ind}(\partial D(0, r), z) = 0$, on peut donc conclure

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(0, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \cdot \underbrace{\text{ind}(\partial D(0, R), z)}_{=1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \cdot \underbrace{\text{ind}(\partial D(0, r), z)}_{=0} \\ \implies &\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(0, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \end{aligned}$$

□

Théorème 5.15. *Sous les hypothèses précédentes, avec $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, $\overline{A(0, r, R)} \subset U$, on a*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k, \quad \forall z \in A(0, r, R), \quad \text{où } \forall n \in \mathbb{Z}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

En particulier, la série de Laurent converge normalement sur $A(0, r, R)$

Démonstration. Sans perdre de généralités, on peut supposer que $z_* = 0$. Point de départ :

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{(I)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{(II)}.$$

1. *Contribution de (I) :* $|z| < R = |\zeta| \Rightarrow \left| \frac{z}{\zeta} \right| < 1$. Alors,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta(1 - \frac{z}{\zeta})} = \frac{1}{\zeta} \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}},$$

avec convergence absolue, localement uniforme en $z \in D(0, R)$, $\zeta \in \partial D(0, R)$. Ainsi,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0, R)} f(\zeta) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \right) d\zeta.$$

On a convergence uniforme sur $\partial D(0, R)$ qui est compact, nous pouvons ainsi échanger la somme et l'intégrale.

$$= \sum_{n \geq 0} z^n \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right)}_{=: a_n}$$

C'est la partie régulière de la série de Laurent, qui converge $\forall z \in D(0, R)$.

2. *Contribution de (II) :* $|\zeta| < |z| \Rightarrow \left| \frac{\zeta}{z} \right| < 1$, donc

$$\frac{-1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{z(1 - \frac{\zeta}{z})} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\zeta}{z} \right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}},$$

avec convergence absolue uniforme en $z \in K \subseteq A(0, r, R)$ et uniforme en $\zeta \in \partial D(0, r)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0, r)} f(\zeta) \left(\sum_{n \geq 0} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}} \right) d\zeta \\ &= \sum_{n \geq 0} z^{-(n+1)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0, r)} f(\zeta) \zeta^n d\zeta = \sum_{k=-\infty}^{-1} z^k \underbrace{\oint_{\partial D(0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta}_{a_k} \end{aligned}$$

□

5.2 Analyse des singularités des fonctions holomorphes

Définition 5.16 ((vraie) singularité). Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine. Soit $z_\star \in U^c$. Supposons que " z_\star est entouré par U ", dans le sens où $\exists \varepsilon > 0$ tel que $A(z_\star, 0, \varepsilon) \subseteq U$. Enfin, soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Alors z_\star est une (vraie) singularité de f si f n'est pas prolongeable de manière holomorphe en $U \cup \{z_\star\}$, ce qui équivaut par Riemann à f est non bornée autour de z_\star

Question : quelle est la structure des (vraies) singularités ?

Définition 5.17. Soit z_\star une vraie singularité de f . Soit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_\star)^n$ la série de Laurent de f dans $A(z_\star, 0, \underbrace{\varepsilon}_{>0})$ telle que $\overline{A(z_\star, r, \varepsilon)} \subseteq U, \forall 0 < r < \varepsilon$. La partie singulière $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_\star)^n$ est non triviale si z_\star est non-effaçable.

(i) Si la partie singulière est finie : On appelle z_\star un *pôle* de f , et on dit que f est *méromorphe* en z_\star .

Alors $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_\star)^n = \sum_{n=-k}^{-1} a_n (z - z_\star)^n$ tel que $a_{-k} \neq 0, k \geq 1$. On appelle k l'*ordre du pôle*. Si $k = 1, z_\star$ est un *pôle simple*, si $k = 2$, c'est un *pôle double*, etc.

(ii) S'il y a une infinité de termes $\neq 0$ dans $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_\star)^n$. Alors z_\star est appelée *singularité essentielle*.

5.3 Fonction méromorphes

Définition 5.18 (méromorphe). Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine. Soit $\{z_j\}_{j \geq 1}$ (ou alors $\{z_j\}_{1 \leq j \leq N}$) une collection au plus dénombrable de points de U sans qu'il n'y ait de points d'accumulations des z_j dans U (il peut y en avoir sur ∂U). On dit que f est *méromorphe* sur U , pourvu que $f|_V$, où $V = U \setminus \{z_j\}$ est holomorphe et chaque z_j est un pôle de f .

Exemple 5.19. (i) $U = \mathbb{C}, \{z_1, z_2\} = \{0, 1\}, f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$. $f : V = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe et $0, 1$ sont des pôles de f . Si $z_\star = 0 : f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 0} z^n$, converge sur $A(0, 0, 1)$. L'ordre des pôles vaut la partie principale ne contient que $\frac{1}{z}$. Si $z_\star = 1 : f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{1-(1-z)} = -\frac{1}{z-1} + \sum_{n \geq 0} (-1)^n (z-1)^n$ qui converge sur $A(1, 0, 1)$.

5.3.1 Structure générale des fonctions méromorphes

Il est important de d'abord classifier les pôles

Proposition 5.20. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, $z_\star \in U^c$ une (vraie) singularité de f . Alors z_\star est un pôle si et seulement si $\{k \in \mathbb{N} \mid (z - z_\star)^k f(z) \text{ est borné autour de } z_\star\} \neq \emptyset$. De plus, $n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid (z - z_\star)^k f(z) \text{ est borné autour de } z_\star\}$ est l'ordre du pôle z_\star .

Démonstration. " \Rightarrow " Supposons que z_\star soit un pôle de f . Donc $f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_\star)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_\star} + \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_\star)^k$ converge sur $A(z_\star, 0, \varepsilon)$, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Ensuite,

$$(z - z_\star)^n f(z) = a_{-n} + \dots + (z - z_\star) \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_\star)^k, \quad a_{-n} \neq 0$$

$$\implies n \in \{k \in \mathbb{N} \mid (z - z_\star)^k f(z) \text{ borné autour de } z_\star\}.$$

De plus, n est minimal. En effet, $f(z) \cdot (z - z_\star)^{n-1} = \frac{a_{-n}}{z-z_\star} + \dots$, et $\frac{a_{-n}}{z-z_\star}$ n'est pas borné autour de z_\star car $a_{-n} \neq 0$.

" \Leftarrow " Soit $z_\star \in U^c$ une singularité telle que $\{k \in \mathbb{N} \mid (z - z_\star)^k f(z) \text{ borné autour de } z_\star\}$ soit non vide. Soit n minimal avec cette propriété. Alors $(z - z_\star)^n f(z)$ est borné autour de z_\star . Par Riemann (théorème 5.2), z_\star est effaçable comme singularité pour $g(z) = (z - z_\star)^n f(z)$.

Ainsi, $f(z) = \sum_{k \geq 0} b_k (z - z_*)^{k-n}$, pourvu que $z \in D(z_*, \delta) \setminus \{z_*\}$, ce qui finalement implique que z_* est un pôle car la partie singulière de la série de Laurent est finie. □

Par cette proposition, on déduit l'implication suivante :

$$f \text{ méromorphe en } z_* \implies f(z) = \frac{\sum_{k \geq 0} b_k (z - z_*)^k}{(z - z_*)^n}, \quad b_0 \neq 0, \quad n = \text{ordre du pôle en } z_*.$$

Proposition 5.21. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine. Soient $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, avec $g \neq 0$. Alors le rapport $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ est méromorphe sur U , ses pôles étant un sous-ensemble de l'ensemble des zéros de g , noté $P(h) \subseteq N(g)$.

Remarque 5.22. L'inverse est aussi vrai (on ne le prouvera pas dans ce cours)

Démonstration. Nous devons distinguer différents cas sur la position de $z_* \in U$

- Si $z_* \in U$ est tel que $g(z_*) \neq 0$, alors $\frac{1}{g(z)}$ est bien défini autour de z_* et est holomorphe.
- Si $z_* \in N(g)$, on peut exprimer $g(z) = \sum_{n \geq k} a_n (z - z_*)^n$ où $k \geq 1$ est l'ordre du zéro. De fait, $a_k \neq 0$ sur un disque $d(z_*, \delta)$ avec $\delta > 0$ suffisamment petit. De la même manière, $f(z) = \sum_{n \geq l} b_n (z - z_*)^n$ où $l \geq 0$ et $b_l \neq 0$ sur le même disque (quitte à diminuer δ). On peut alors exprimer le rapport des deux fonctions sur le disque de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{(z - z_*)^l \sum_{n \geq l} b_n (z - z_*)^{n-l}}{(z - z_*)^{l-k} \sum_{n \geq k} a_n (z - z_*)^{n-k}} \\ &= (z - z_*)^{l-k} h(z) \end{aligned}$$

où $h(z)$ est holomorphe autour de z_* et $h(z_*) = \frac{b_l}{a_k} \in \mathbb{C}^*$. On distingue alors 2 cas possibles

- Si $l \geq k$, alors z_* est une singularité effaçable
- Si $l < k$, alors on a un pôle d'ordre $k - l$ en z_* parce que $\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{b_l}{a_k} (z - z_*)^{l-k} + O((z - z_*)^{l-k+1})$

□

Remarque 5.23. En fait, la formule $h(z_*) = \frac{b_l}{a_k}$ nous sera utile plus tard.

Ce résultat nous permet en fait d'établir un résultat utile concernant le logarithme complexe

Proposition 5.24. Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et f méromorphe. Alors, $h(z) := \frac{f'(z)}{f(z)}$ est méromorphe sur U avec uniquement des pôles simples $P(h) = P(f) \cup N(f)$

Démonstration. Comme dans la preuve précédente, on doit distinguer différents cas quant à l'appartenance de $z_* \in U$.

- Si $z_* \notin N(f) \cup P(f)$, alors clairement, $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est holomorphe autour de z_*
- Si $z_* \in N(f)$, f est à nouveau holomorphe autour de z_* . Il s'agit de se ramener au cas particulier de la proposition précédente.

En fait, on remarque que, dans la proposition précédente, f correspond à f' et g correspond à f dans notre cas.

On écrit alors

$$f(z) = \sum_{n \geq k} a_n (z - z_*)^n = (z - z_*)^k \sum_{n \geq k} a_n (z - z_*)^{n-k} \text{ avec } k \geq 1 \text{ et } a_k \neq 0$$

et similairement

$$f'(z) = \sum_{n \geq k}^{\infty} a_n n (z - z_*)^{n-1} = (z - z_*)^{k-1} \sum_{n \geq k}^{\infty} a_n n (z - z_*)^{n-k} \text{ avec } k \geq 1 \text{ et } a_k \neq 0$$

Dans la preuve précédente, on peut alors poser $l = k - 1, b_l = ka_k$ et donc, l'ordre du pôle $\frac{f'}{f}$ en z_* est donné par $k - l = 1$, c'est donc bien un pôle simple.

- Si z_* est un pôle d'ordre k de f , alors on a une série de Laurent représentant f en $D(z_*, \delta) \setminus \{z_*\}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^k \frac{a_{-n}}{(z - z_*)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_*)^n, & a_{-k} \neq 0 \\ &= \frac{a_{-k}}{(z - z_*)^k} \left(\sum_{n=1}^k \frac{a_{-n}/a_{-k}}{(z - z_*)^{n-k}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{-k}} (z - z_*)^{n+k} \right) \\ &= \frac{a_{-k}}{(z - z_*)^k} \left(\sum_{n=1}^k \frac{a_{-n}}{a_{-k}} (z - z_*)^{k-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{-k}} (z - z_*)^{n+k} \right) \end{aligned}$$

On peut alors décrire une nouvelle suite $\{b_n\}_{n \geq 0}^{\infty}$ telle que $b_n = \frac{a_{n-k}}{a_{-k}}$ si $n \neq k$ et $b_k = 0$ si $n = k$. Ceci nous permet d'écrire

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_*)^k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_*)^n$$

De la même manière, on peut écrire

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{n=1}^k \frac{(-n)a_{-n}}{(z - z_*)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z - z_*)^{n-1} \\ &= \frac{-ka_{-k}}{(z - z_*)^{k+1}} \left(\sum_{n=1}^k \frac{-na_{-n}}{-ka_{-k}} (z - z_*)^{k-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n n}{-ka_{-k}} (z - z_*)^{n+k} \right) \end{aligned}$$

Et on définit de également $\{c_n\}_{n \geq 0}^{\infty}$ telle que $c_n = \frac{(n-k)a_{n-k}}{-ka_{-k}}$ si $n \neq k$ et $c_k = 0$ si $n = k$. On peut donc écrire

$$f'(z) = \frac{-ka_{-k}}{(z - z_*)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_*)^n$$

Ceci nous permet d'exprimer le rapport

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{\frac{a_{-k}}{(z - z_*)^k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_*)^n}{\frac{-ka_{-k}}{(z - z_*)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_*)^n} = \frac{-k}{(z - z_*)} \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_*)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_*)^n} \right) \\ &= \frac{-k}{(z - z_*)} \left(1 + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_*)^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_*)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_*)^n} \right) \\ &= \frac{-k}{(z - z_*)} \left(1 + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - c_n) (z - z_*)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_*)^n} \right) \end{aligned}$$

Alors z_* est encore un pôle simple. □

5.3.2 Fonction méromorphe particulière

Le but de cette section est de s'intéresser à la fonction $\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$ qui est méromorphe sur \mathbb{C} .

En exercice, on a montré que

$$\cot(z) - \left[\frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2 \pi^2} \right]$$

qui est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\pi \cdot \mathbb{Z}\}$ et peut être prolongée de manière holomorphe sur \mathbb{C} . Pour simplifier les notations, nous allons en fait nous intéresser à la fonction

$$\pi \cot(\pi z) - \left[\frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \right]$$

qui peut également être prolongée de manière holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

Théorème 5.25.

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (5.1)$$

Pour prouver ce résultat, nous allons avoir besoin de 2 autres résultats.

Lemme 5.26. *Si $g(z)$ note le côté gauche ou le côté droite de 5.1, on a que $2 \cdot g(2z) = g(z) + g(z + \frac{1}{2})$, pourvu que $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}\mathbb{Z}\}$ où $\frac{1}{2}\mathbb{Z} := \{\frac{1}{2}n, n \in \mathbb{Z}\}$*

Démonstration. Soit

$$\begin{aligned} g(z) &:= \pi \cot(\pi z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \\ 2 \cdot g(2z) &= 2\pi \frac{\cos(2\pi z)}{\sin(2\pi z)} \\ &= \pi \frac{\cos^2(\pi z) - \sin^2(\pi z)}{\sin(\pi z) \cos(\pi z)} = \pi \left[\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} - \frac{\sin(\pi z)}{\cos(\pi z)} \right] \\ &= \pi \left[\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} + \frac{\cos(\pi z + \frac{\pi}{2})}{\sin(\pi z + \frac{\pi}{2})} \right] = \pi \cot(\pi z) + \pi \cot(\pi z + \frac{\pi}{2}) \\ &= g(z) + g(z + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

On montre alors le même résultat pour l'autre côté de l'égalité

$$\begin{aligned} g(z) &:= \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{z} + \sum_{1=n}^{2N} \frac{2z}{z^2 - n^2} \right] \\ g_N(z) &:= \frac{1}{z} + \sum_1^{2N} \frac{2z}{z^2 - n^2}, \quad \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z - n} + \frac{1}{z + n} \\ &= \sum_{n=-2N}^{2N} \frac{1}{z - n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \cdot g_N(2z) &= \sum_{n=-2N}^{2N} \frac{2}{2z-n} = \sum_{n=-2N}^{2N} \frac{1}{z-\frac{n}{2}} \\
&= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{z-n} + \sum_{n=-N}^N \frac{1}{z+\frac{1}{2}-n} - \frac{1}{z+\frac{1}{2}+N}
\end{aligned}$$

En supposant $N \in 2\mathbb{N}$, on voit que

$$2 \cdot g_N(2z) = g_{N/2}(z) + g_{N/2}(z + \frac{1}{2}) - \frac{1}{z + \frac{1}{2} + N}$$

En passant à la limite $N \rightarrow \infty$, le dernier terme s'annule asymptotiquement et on a bien

$$2 \cdot g(2z) = g(z) + g(z + \frac{1}{2}), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2} \mathbb{Z}\}$$

□

Lemme 5.27. *Si h est une fonction entière et satisfait la relation*

$$2 \cdot h(z) = h(z) + h(z + \frac{1}{2}), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2} \mathbb{Z}\} \quad (5.2)$$

alors h est constante

Démonstration. Considérons le disque $D(0, 2)$, on remarque que h est continue sur $\overline{D(0, 2)}$ et elle prend son maximum sur le disque fermé dans $z_* \in \overline{D(0, 2)}$, alors $|h(z_*)| \geq |h(z)| \quad \forall z \in \overline{D(0, 2)}$.

D'après 5.2, si on pose $z = \frac{z_*}{2}$, on a

$$2 \cdot h(z_*) = h(\frac{z_*}{2}) + h(\frac{z_*}{2} + \frac{1}{2})$$

Or, si $z_* \in \overline{D(0, 2)}$ on a que $\frac{z_*}{2}$ et $\frac{z_*}{2} + \frac{1}{2} \in D(0, 2)$, de fait,

$$\begin{aligned}
2|h(z_*)| &= |h(\frac{z_*}{2}) + h(\frac{z_*}{2} + \frac{1}{2})| \\
&\leq |h(\frac{z_*}{2})| + |h(\frac{z_*}{2} + \frac{1}{2})| \leq 2|h(z_*)|
\end{aligned}$$

Alors, on peut écrire

$$|h(\frac{z_*}{2})| = |h(\frac{z_*}{2} + \frac{1}{2})| = |h(z_*)|$$

Remarquons que, si $|h(\frac{z_*}{2})| < |h(\frac{z_*}{2} + \frac{1}{2})|$, (ou l'inverse) alors on aurait $|h(\frac{z_*}{2})| < |h(z_*)| < |h(\frac{z_*}{2} + \frac{1}{2})|$, or, $|h(z_*)|$ est un maximum de h donc cette inégalité est impossible.

De fait, on sait que $\frac{z_*}{2}$ est également un maximum qui est compris dans l'intérieur du disque, alors, par le principe du maximum, h est nécessairement constante sur $D(0, 2)$ □

Avec ces 2 résultats, nous pouvons finalement démontrer le théorème

Preuve du théorème. On commence par poser $h(z) := \pi \cot(\pi z) - \left[\frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2+n^2} \right]$. D'après le premier lemme, on a que $2 \cdot h(2z) = h(z) + h(z + \frac{1}{2})$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2} \mathbb{Z}\}$, or, comme h peut être prolongée à une fonction entière, la relation est vrai pour tout $z \in \mathbb{C}$. En utilisant le deuxième lemme, on peut conclure que h est une fonction constante. Il reste à montrer que cette

constante est en fait 0.

En fait,

$$\begin{aligned} C = h(z) &= \pi \cot(\pi z) - \left[\frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} \right] = \left(\pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} - \frac{1}{z} \right) - \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} \\ &= \underbrace{\frac{\pi z \cos(\pi z) - \sin(\pi z)}{z \sin(\pi z)}}_{=: h_1(z)} - \underbrace{\sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}}_{=: h_2(z)} \end{aligned}$$

Ensuite, on peut voir que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} h_1(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi z(1 - \frac{\pi^2 z^2}{2} + o(z^4)) - (\pi z - \frac{\pi^3 z^3}{6} + o(z^5))}{z(\pi z - \frac{\pi^3 z^3}{6} + o(z^5))} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{-2\pi^3 z^3}{6} + o(z^5)}{\pi z^2 - \frac{\pi^3 z^4}{6} + o(z^6)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-2\pi^3 z + o(z)}{6\pi + o(z)} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi que

$$\lim_{z \rightarrow 0} h_2(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n \geq 1} \frac{2}{z - \frac{1}{z}n^2} = 0$$

□

Théorème 5.28. *La relation suivante est vraie*¹

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Démonstration. Considérons la série formelle

$$\sum_{n \geq 1} \log\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad |z| < \frac{1}{2}, \quad 1 - \frac{z^2}{n^2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$$

Si on définit $g_n(z) := \frac{z^2}{n^2}$ avec $|z| < \frac{1}{2}$, alors on a que $\sum_{n \geq 1} g_n(z)$ converge normalement. Ensuite, on montre dans les séries d'exercices que $\sum_{n \geq 1} \log\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ converge normalement pour $r = |z| < \frac{1}{2}$ où \log est la branche principale du logarithme naturel défini sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. De fait, on a que $\sum_{n \geq 1} \log\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ est holomorphe en $D(0, \frac{1}{2})$. Enfin, on restreint $z \in D(0, \frac{1}{2}) \setminus \mathbb{R}_-$, alors la fonction $h(z) := \log(\pi z) + \sum_{n \geq 1} \log\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ est holomorphe. On explicite alors

$$h'(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{-2z/n^2}{1 - z^2/n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \cot(\pi z)$$

De plus, si $z \in D(0, \frac{1}{2}) \setminus \mathbb{R}_-$, alors $\sin(\pi z) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, donc $\log(\sin(z))$ est bien définie avec la branche principale du logarithme naturel et on peu expliciter

$$(\log(\sin(\pi z)))' = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z)$$

1. Le produit infini est formalisé en séries d'exercices

Alors, on a

$$[h - \log(\sin(\pi z))]' = 0, \quad z \in D(0, \frac{1}{2}) \setminus \mathbb{R}_-$$

$$h - \log(\sin(\pi z)) = C \iff h(z) = \log(\sin(\pi z)) + C, \quad z \in D(0, \frac{1}{2}) \setminus \mathbb{R}_-$$

On peut alors poser

$$e^{h(z)} = e^{\log(\sin(\pi z)) + C}$$

$$e^{\log(\pi z) + \sum_{n \geq 1} (\log(1 - \frac{z^2}{n^2}))} = e^C \cdot \sin(\pi z)$$

$$\pi z \cdot \prod_{n \geq 1} (1 - \frac{z^2}{n^2}) = e^C \cdot \sin(\pi z)$$

$$\implies \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} \prod_{n \geq 1} (1 - \frac{z^2}{n^2}) = e^C$$

Où on peut laisser $z \rightarrow 0$ pour voir que $e^C = 1$, alors l'égalité est vérifiée. □

Epilogue

On se souvient que $\sin(\pi z) = \pi z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$

Corollaire 5.29 (L. Euler 1735).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Démonstration. Considérons la fonction $h_k(z) = \pi z \cdot \prod_{n=1}^k (1 - \frac{z^2}{n^2})$, $k \in \mathbb{N}$.

$\lim_{k \rightarrow \infty} h_k(z) = \sin(\pi z)$ localement et uniformément.

$$h_k(z) = \pi z - \pi \cdot (1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2}) z^3 + z^5 \cdot g_k(z),$$

où $g_k(z)$ est un polynôme d'ordre $2k-4$. On a ensuite $-\pi(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1)} \frac{h_k(z)}{\zeta^4} d\zeta$.
Si on laisse $k \rightarrow \infty$, par la convergence localement uniforme de $h_k(z) \xrightarrow{(\star)} \sin(\pi z)$,

$$-\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1)} \frac{h_k(\zeta)}{\zeta^4} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1)} \frac{\sin(\pi \zeta)}{\zeta^4} d\zeta$$

(en utilisant la formule de Cauchy pour les termes d'une série analytique) Enfin, si on écrit $\sin(\pi \zeta) = \pi \zeta - \frac{\pi^3 \zeta^3}{6} + \mathcal{O}(\zeta^5)$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1)} \frac{\sin(\pi \zeta)}{\zeta^4} d\zeta = -\frac{\pi^3}{6}$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

5.4 Fin de la classification des singularités

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $z_* \in U$, $f : U \setminus \{z_*\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors

$$z_* \text{ (vraie) singularité} \iff f \text{ non bornée autour de } z_*$$

(vraie singularité : pôle ou singularité essentielle).

On peut toujours approcher une singularité essentielle sans exploser.

— Dans le cas d'un pôle,

$$\begin{aligned} z_* \text{ pôle de } f &\iff \lim_{z \xrightarrow{\neq} z_*} |f(z)| = \infty \\ &\iff \forall M > 0, \exists \delta > 0 : |f(z)| > M, \forall z \in D(z_*, \delta) \setminus \{z_*\}. \end{aligned}$$

— Dans le cas d'une singularité, on a une classification donnée par le théorème suivant.

Théorème 5.30 (Casorati-Weierstrass). *Si z_* comme auparavant est une singularité essentielle pour $f : U \setminus \{z_*\} \rightarrow \mathbb{C}$, alors pour tout $\delta > 0$, l'image du disque poncturé $D(z_*, \delta) \setminus \{z_*\}$ par f est dense dans \mathbb{C} . Ce qui est équivalent à $\overline{f(D(z_*, \delta) \setminus \{z_*\})} = \mathbb{C}$.*

Remarque 5.31. On a le théorème de grand Picard qui nous dit que

$$f(D(z_*, \delta) \setminus \{z_*\}) = \begin{cases} \mathbb{C} \\ \mathbb{C} \setminus \{a\} \end{cases}$$

Démonstration. Supposons par l'absurde que Casorati-Weierstrass est faux. Alors il existe un $\delta > 0$ tel que $f(D(z_*, \delta) \setminus \{z_*\})$ n'est pas dense. Alors

$$\begin{aligned} \overline{f(D(z_*, \delta) \setminus \{z_*\})} \neq \mathbb{C} &\iff \exists p \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0 \text{ t.q. } D(p, \varepsilon) \subset (f(D(z_*, \delta) \setminus \{z_*\}))^c \\ &\iff |f(z) - p| > \varepsilon, \quad \forall z \in D(z_*, \delta) \setminus \{z_*\}. \end{aligned}$$

En particulier, la fonction $g(z) := \frac{1}{f(z) - p}$ est bien holomorphe sur $D(z_*, \delta) \setminus \{z_*\}$ et bornée ici. En effet, $|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon} < \infty, \forall z \in D(z_*, \delta) \setminus \{z_*\}$. D'après Riemann, elle peut être prolongée de manière holomorphe à $D(z_*, \delta)$. Enfin, on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{g(z)} + p, \quad \forall z \in D(z_*, \delta) \setminus \{z_*\} \\ &= \frac{1 + p \cdot g(z)}{g(z)} \end{aligned}$$

mais ceci est méromorphe car $g(z) \not\equiv 0$, donc f n'admet pas de singularité essentielle, ce qui est une contradiction. \square

5.4.1 Théorème des Résidus

Motivation : Si $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, et $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ un lacet contractible en U . Alors on a montré que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Que se passe-t-il si f n'est pas holomorphe mais est

1. méromorphe ;
2. telle qu'il y a des singularités essentielles ?

Théorème 5.32 (Théorème des Résidus). Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, soit $F \subset U$ un ensemble fini, soit $f : U \setminus F \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et enfin soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U \setminus F$ un lacet contractible en U . Alors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{p \in F} \operatorname{res}(f, p) \cdot \operatorname{ind}(\gamma, p).$$

Ici, on définit $\operatorname{res}(f, p)$ comme le coefficient de $(z - p)^{-1}$ dans la série de Laurent présentant f autour de p .

$$\iff f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-p)^n = \sum_{n=-\infty}^{-2} a_n(z-p)^n + \underbrace{a_{-1}}_{\operatorname{res}(f,p)} (z-p)^{-1} + \sum_{n \geq 0} a_n(z-p)^n.$$

Démonstration. Pour tout $p \in F$, on a une description locale autour de p comme série de Laurent pour f :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-p)^n, \quad z \in D(p, \delta) \setminus \{p\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-p)^n + \sum_{n \geq 0} a_n(z-p)^n \end{aligned}$$

Par la proposition 5.14, on a que

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{\text{part. rég.}} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{\text{part. sing.}}, \quad \forall z \in A(p, r, R).$$

En particulier,

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(p,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \cdot (z-p)^n.$$

Comme $r < |z|$ est arbitraire, on peut laisser $r \rightarrow 0$. On voit que

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(p)} (z-p)^n$$

converge localement uniformément vers une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{p\}$.

Pour démontrer le théorème, on va réduire au cas de f holomorphe en U . En fait, pour chaque $p \in F$, on soustrait la partie singulière de f :

$$f(z) \implies g(z) := f(z) - \sum_{p \in F} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(p)} (z-p)^n,$$

et on obtient une fonction régulière *partout* en U , donc holomorphe. Comme γ est contractible

en U , on déduit que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) dz = 0 \\
\iff & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{p \in F} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(p)} (z-p)^n dz \\
& = \sum_{p \in F} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\sum_{n=-\infty}^{-2} a_n^{(p)} (z-p)^n \right) dz + \sum_{p \in F} a_{-1}^{(p)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (z-p)^{-1} dz \\
& = \underbrace{\sum_{p \in F} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\sum_{n=-\infty}^{-2} a_n^{(p)} (z-p)^n \right) dz}_{(I)} + \sum_{p \in F} \text{res}(f, p) \cdot \text{ind}(\gamma, p).
\end{aligned}$$

Pour (I), on utilise le lemme suivant :

Lemme 5.33. *Pour chaque $p \in F$, les fonction $\sum_{n=-\infty}^{-2} a_n^{(p)} \cdot (z-p)^n$ admettent une primitive holomorphe en $\mathbb{C} \setminus \{p\}$.*

Preuve du lemme. On définit

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} a_n^{(p)} \frac{(z-p)^{n+1}}{n+1}.$$

La série converge localement uniformément en $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ vers une fonction holomorphe, ce qui donne $F(z)$. et $F'(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} a_n^{(p)} (z-p)^n$. La chose clé est que $\frac{1}{n+1}$ est bien défini si $n \leq -2$, mais pas si $n = -1$. \square

Ainsi, par le lemme 5.33, on déduit que

$$\sum_{n=-\infty}^{-2} a_n^{(p)} (z-p)^n = F'(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{p\},$$

Donc on a

$$\int_{\gamma} \left(\sum_{n=-\infty}^{-2} a_n^{(p)} (z-p)^n \right) dz = \int_{\gamma} F'(z) dz = 0.$$

Ce qui conclut la preuve. \square

Pour appliquer le théorème, on doit savoir comment déterminer le résidu $\text{res}(f, p)$ pour $f : U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe.

Proposition 5.34. *Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $z_{\star} \in U$, et $f : U \setminus \{z_{\star}\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.*

1. Si z_{\star} est un pôle simple, alors $\text{res}(f, z_{\star}) = \lim_{z \rightarrow z_{\star}, z \neq z_{\star}} (z - z_{\star}) \cdot f(z)$.
2. Si $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$, $z \in U \setminus \{z_{\star}\}$ et $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphes, et si z_{\star} est un zéro simple en z_{\star} , alors $\text{res}(f, z_{\star}) = \frac{h(z_{\star})}{g'(z_{\star})}$.

Remarque 5.35. Si z_{\star} est un zéro simple de g , alors $g'(z_{\star}) \neq 0$.

Si z_{\star} est un zéro pour h , alors z_{\star} est une singularité effaçable de f .

3. Si f est méromorphe en U , et $z_\star \in P(f) \cup N(f)$, alors la fonction $h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ est méromorphe, et a un pôle simple en z_\star de résidu $\text{res}(h, z_\star) = \begin{cases} k & \text{si } z_\star \in N(f), \text{ d'ordre } k \geq 1 \\ -k & \text{si } z_\star \in P(f), \text{ d'ordre } k \geq 1. \end{cases}$

Démonstration. — Pour le point 3, la démonstration a été faite dans la preuve de la proposition 5.24.

— Pour le point 1, d'après l'hypothèse, on a

$$\begin{aligned} f(z) = a_{-1}(z - z_\star)^{-1} + \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_\star)^n &\Rightarrow (z - z_\star) \cdot f(z) = a_{-1} + \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_\star)^n \\ &\Rightarrow \lim_{\substack{z \rightarrow z_\star \\ z \neq z_\star}} (z - z_\star)f(z) = a_{-1} = \text{res}(f, z_\star). \end{aligned}$$

— Pour 2, la dernière semaine, on avait montré que sous les hypothèses de 2, soit que z_\star est effaçable (si $h(z_\star) = 0$), soit que z_\star est un pôle simple (si $h(z_\star) \neq 0$). Dans cette dernière situation, d'après 1, on a

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_\star \\ z \neq z_\star}} (z - z_\star) \frac{h(z)}{g(z)} = \frac{h(z_\star)}{g'(z_\star)},$$

parce que

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_\star \\ z \neq z_\star}} \frac{g(z)}{z - z_\star} = \lim_{\substack{z \rightarrow z_\star \\ z \neq z_\star}} \frac{g(z) - g(z_\star)}{z - z_\star} = g'(z_\star).$$

□

Exemple 5.36. Différents cas où ce théorème peut être utile :

- Si γ est un lacet simple c'est-à-dire $\{p \in \mathbb{C} \mid \text{ind}(\gamma, p) \neq 0\} \neq \emptyset$, alors, $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{p \in F} \text{res}(f, p)$
- Supposons que f est méromorphe en U avec des pôles en F et f est non identiquement nulle en U

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{p \in F} v_f(p) \text{ind}(\gamma, p)$$

$$\begin{aligned} N(f) \cup P(f) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{où } v_f(p) : \quad p &\longmapsto \begin{cases} k, & \text{si } p \text{ est un 0 d'ordre } k \text{ de } f \\ -k, & \text{si } p \text{ est un pôle d'ordre } k \text{ en } p \end{cases} \end{aligned}$$

5.4.2 Applications du théorème des résidus

Exemple 5.37.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} [\arctan(x)]_{-N}^N = \pi$$

En passant par les nombres complexes, $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ est méromorphe et ses pôles sont précisément $p = \pm i$.

On peut alors considérer le chemin $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow [-N, N]$ et $\gamma_2 : [1, 2] \rightarrow [N, -N]$ tel que γ_1 est la ligne droite et γ_2 est l'arc de cercle supérieur centré en 0 reliant N à $-N$.

Alors, le théorème des résidus nous donne

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z) dz = \sum_{p \in F} \text{res}(f, p) = \text{res}(f, i)$$

On peut alors calculer expliciter

$$\operatorname{res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z + i} = \frac{1}{2i}$$

Alors,

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z) dz = \pi$$

Pour obtenir $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$, on interprète le calcul précédent comme

$$\begin{aligned} \pi &= \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \\ &= \int_{-N}^N f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{-N}^N \frac{1}{1+x^2} + \int_{\gamma_2} f(z) dz \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0$. Pour ceci, on utilise la propriété (5) des intégrales basiques.

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \leq \ell(\gamma_2) \max_{z \in \gamma_2} |f(z)| = \pi N \max_{z \in \gamma_2} \left| \frac{1}{1+z^2} \right|$$

Et on peut écrire $z = Ne^{2\pi it}$ avec $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et

$$|1+z^2| \geq |z^2| - 1 = N^2 - 1 \geq \frac{N^2}{2} \quad \text{pour } N \geq 2$$

Il suit que

$$\pi N \max_{z \in \gamma_2} |f(z)| \leq \pi N \frac{1}{N^2/2} \leq \frac{2\pi}{N} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

Proposition 5.38. Soit f , une fonction méromorphe sur \mathbb{C} avec un nombre fini de pôles. De plus, supposons que $|f(z)| = o(\frac{1}{|z|})$ si $|z| \rightarrow +\infty \iff \lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z)| \cdot |z| = 0$. Alors, s'il n'y a pas de pôle sur \mathbb{R} , on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \begin{cases} 2\pi i \cdot \sum_{p \in P(f) \cap \mathbb{H}^+} \operatorname{res}(f, p) \\ -2\pi i \sum_{p \in P(f) \cap \mathbb{H}^-} \operatorname{res}(f, p) \end{cases}$$

Démonstration. En fait, on construit les mêmes chemins γ_1 et γ_2 puis on divise à nouveau l'intégrale en sa partie réelle et l'arc de cercle. On montre que cette deuxième partie tend vers 0 comme suit :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \pi N \max_{z \in \gamma_2} |f(z)| \leq \pi \lim_{N \rightarrow \infty} N \max_{|z|=N} |f(z)| = 0$$

où la dernière égalité est justifiée car $f(z) = o(\frac{1}{|z|})$ par hypothèse. □

Exemple 5.39. Une autre classe d'intégrales définies :

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta$$

où $R(x, y)$ est une fonction rationnelle sans singularité sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$

Proposition 5.40. *On a que l'intégrale précédente est égale à $2\pi i \sum_{p \in P(r) \cap D(0,1)} \text{res}(r, p)$ où $r(z) = \frac{1}{iz} R(\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1}))$, alors r est une fonction rationnelle et méromorphe.*

Démonstration. D'après le théorème des résidus, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1)} r(z) dz &= \sum_{p \in P(r) \cap D(0,1)} \text{res}(r, p) \\ \int_{\partial D(0,1)} r(z) dz &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} R(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta \end{aligned}$$

□

Exemple 5.41.

$$R(\cos(\theta), \sin(\theta)) = \frac{1}{a + \sin(\theta)}, a > 1$$

On introduit alors,

$$r(z) = \frac{1}{iz} \frac{1}{a + \frac{1}{2i}(z - z^{-1})} = \frac{2}{z(2ia + z + z^{-1})} = \frac{2}{z^2 + 2iaz - 1}$$

Les pôles de R correspondent aux zéros de $z^2 + 2iaz - 1$

$$p_{1,2} = \frac{2ia \pm \sqrt{(2ia)^2 + 4}}{2} = -ia \pm \sqrt{1 - a^2} = -ia \pm i\sqrt{a^2 - 1}$$

Un seul de ces points est dans le cercle, il s'agit de $p_1 = -ia + i\sqrt{a^2 - 1}$ car $p_2 = |-ia - i\sqrt{a^2 - 1}| > 1$

Alors, $\frac{2}{z^2 + 2iaz - 1} = \frac{2}{(z - p_1)(z - p_2)}$ et $\text{res}(r, p_1) = \lim_{z \rightarrow p_1} (z - p_1)r(z) = \frac{2}{p_1 - p_2} = \frac{1}{i\sqrt{a^2 - 1}}$. Enfin, on peut conclure

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin(\theta)} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

5.4.3 Transformé de Fourier

Étant donné une fonction f continue, formellement, on pose

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx$$

Proposition 5.42. *Soit f une fonction méromorphe sur \mathbb{C} avec un nombre fini de pôles. En plus, supposons qu'il n'y a aucun pôle sur \mathbb{R} et que $|f(z)| = O(\frac{1}{|z|})$ si $|z| \rightarrow \infty$, c'est-à-dire $\exists C > 0$ t.q. $|f(z)| \leq \frac{C}{|z|}$.*

Alors, on a que $\hat{f}(\xi)$ et

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} i \sum_{p \in P(f) \cap \mathbb{H}^+} \text{res}(e^{-iz\xi} f, p) & \text{si } \xi < 0 \\ -i \sum_{p \in P(f) \cap \mathbb{H}^-} \text{res}(e^{-iz\xi} f, p) & \text{si } \xi > 0 \end{cases}$$

Démonstration. On utilise la même idée de preuve que précédemment en posant la limite et l'arc de cercle.

Soit C_M^+ , l'arc de cercle supérieur comme définit précédemment, on pose alors

$$\int_{-M}^M e^{-ix\xi} f(x) dx + \int_{C_M^+} e^{-ix\xi} f(z) dz = 2\pi i \sum_{p \in P(f) \cap \mathbb{H}^+} \text{res}(e^{-iz\xi} f, p)$$

et on introduit le lemme suivant :

Lemme 5.43. *Sous les hypothèses précédentes sur f , on a $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{C_M^+} e^{iz\xi} f(z) dz = 0$ si $\xi < 0$ et $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{C_M^-} e^{-iz\xi} f(z) dz = 0$ si $\xi > 0$.*

Démonstration. On se contente de prouver le cas $\xi < 0$. En fait, si $z \in \mathbb{H}^+$, on sait que $Im(z) > 0$, $|e^{-iz\xi}| = e^{Re(-iz\xi)} = e^{Im(z)\xi} < 1$ et $\lim_{|z| \rightarrow \infty} e^{Im(z)\xi} = 0$. Ensuite, on décompose l'intégrale $\int_{C_M^+}$ en deux portions; on paramétrise C_M^+ par $t \rightarrow Me^{it}$ où $t \in [0, \pi]$. On pose $\delta > 0$ et $C_{M,1}^+ = \{Me^{it}, t \in [0, \delta] \text{ ou } t \in [\pi, \pi - \delta]\}$ et $C_{M,2}^+ = \{Me^{it}, t \in [\delta, \pi - \delta]\}$. On peut alors borner

$$\left| \int_{C_{M,1}^+} e^{-iz\xi} f(z) dz \right| \leq \ell(C_{M,1}^+) \max_{z \in C_{M,1}^+} |f(z)e^{iz\xi}| \leq 2\delta M \max_{z \in C_{M,1}^+} |f(z)| \leq 2\delta C$$

Ensuite,

$$\left| \int_{C_{M,2}^+} e^{iz\xi} f(z) dz \right| \leq \pi M \max_{z \in C_{M,2}^+} |e^{iz\xi} f(z)| \leq \overbrace{\pi M \max_{z \in C_{M,2}^+} |f(z)|}^{\leq C} \cdot \max_{t \in [\delta, \pi - \delta]} e^{M \sin(t)\xi}$$

Or, $\sin(t) \geq \sin(\delta) > 0$ donc si $\delta > 0$ est suffisamment petit et choisi, on a que $\lim_{M \rightarrow \infty} e^{M \sin(t)\xi} = 0$ (car ξ est négatif) pour tout $t \in [\delta, \pi - \delta]$ uniformément. Il suit que pour un $\delta > 0$ fixe, on a

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left| \int_{C_{M,2}^+} e^{-iz\xi} f(z) dz \right| = 0$$

Ensuite, on avait que

$$\left| \int_{C_{M,1}^+} e^{-iz\xi} f(z) dz \right| \leq 2\delta C$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, on choisit $\delta > 0$ tel que $2\delta C \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ensuite, on choisit M tel que

$$\left| \int_{C_{M,2}^+} f(z) e^{-iz\xi} dz \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Et il suit que pour M suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_M^+} f(z) e^{-iz\xi} dz \right| &\leq \left| \int_{C_{M,1}^+} e^{-iz\xi} f(z) dz \right| + \left| \int_{C_{M,2}^+} e^{-iz\xi} f(z) dz \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $\lim_{M \rightarrow +\infty} \left| \int_{C_M^+} f(z) e^{-iz\xi} dz \right| = 0$ si $\xi < 0$ □

□

Chapitre 6

Théorème des nombres premiers

Théorème 6.1 (Théorème des nombres premiers). *Si on appelle $\pi(x) := \#\{p \mid p < x \text{ et } p \text{ premier}\}$, alors*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} = 1. \quad (6.1)$$

Autrement dit, $\pi(x) \sim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\log x}$.

Dans ce qui suit, p désigne toujours un nombre premier.

Démonstration. Notre but est de montrer que

$$|\{p \leq x\}| \sim \frac{x}{\log(x)} \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|\{p \leq x\}|}{\frac{x}{\log(x)}} = 1. \quad (6.2)$$

Supposons que c'est vrai, il est alors naturel d'introduire la fonction suivante :

$$\theta(x) := \sum_{p \leq x} \log p. \quad (6.3)$$

Lemme 6.2. *On a que le théorème est vrai si et seulement si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1$.*

Preuve du lemme. Supposons que (6.1) est vrai. On veut montrer que

- (I.) $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\theta(x)}{x} \leq 1$;
(II.) et $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\theta(x)}{x} \geq 1$.

Pour (I.), (6.1) implique qu'étant donné $\varepsilon > 0$, pour x suffisamment grand, on a $\pi(x) < (1 + \varepsilon) \frac{x}{\log x}$. Alors

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \leq \sum_{p \leq x} \log x = \log x \cdot \pi(x) < (1 + \varepsilon)x.$$

Donc $\frac{\theta(x)}{x} \leq 1 + \varepsilon$. On en déduit (I.).

Pour (II.), soit $0 < c < 1$ arbitraire. On peut décomposer $\theta(x)$ de la manière suivante :

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p = \sum_{p \leq cx} \log p + \sum_{cx < p \leq x} \log p.$$

Considérons dans un premier temps la première somme,

$$\sum_{cx < p \leq x} \log p \geq \log(cx) \cdot \#\{p : cx < p \leq x\} = \log(cx) \cdot [\pi(x) - \pi(cx)].$$

On en déduit l'inégalité

$$\begin{aligned} \theta(x) &\geq \log(cx)[\pi(x) - \pi(cx)] \\ \implies \frac{\theta(x)}{x} &\geq \log(cx) \frac{\pi(x)}{x} - \log(cx) \frac{\pi(cx)}{x} = \log(cx) \frac{\pi(x)}{x} - c \log(cx) \cdot \frac{\pi(cx)}{cx} \end{aligned}$$

Par hypothèse et comme c et cx ne diffèrent qu'à une constante près, $\log(cx) \frac{\pi(x)}{x} \rightarrow 1$ et $\log(cx) \cdot \frac{\pi(cx)}{cx} \rightarrow 1$, donc en passant à la limite,

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\theta(x)}{x} \geq 1 - c.$$

Etant donné que cette inégalité est vraie pour tout $c \in (0, 1)$, on en déduit (II).

Il reste encore à montrer l'autre implication. On a d'une part que

$$1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{p \leq x} \log p}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x) \cdot \pi(x)}{x}.$$

D'autre part, soit $\varepsilon > 0$:

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \geq \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leq x} \log p \geq \log(x^{1-\varepsilon})(\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})) = (1 - \varepsilon) \log(x) \pi(x) \left(1 - \frac{\pi(x^{1-\varepsilon})}{\pi(x)}\right).$$

Notons que $\pi(x^{1-\varepsilon}) \leq x^{1-\varepsilon}$ et $\theta(x) \leq \pi(x) \log(x)$. Donc

$$0 \geq -\frac{\pi(x^{1-\varepsilon})}{\pi(x)} \geq -\frac{x^{1-\varepsilon}}{\pi(x)} \geq -\frac{x^{1-\varepsilon} \log(x)}{\theta(x)} = -\frac{x^{1-\varepsilon} \log(x)}{x} \cdot \frac{x}{\theta(x)}.$$

Comme $x/\theta(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$,

$$0 \geq \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{\pi(x^{1-\varepsilon})}{\pi(x)} \geq \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\varepsilon} \log(x) = 0.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x > x_\varepsilon$, $\left| \frac{\pi(x^{1-\varepsilon})}{\pi(x)} \right| < \varepsilon$ et donc pour tout $x > x_\varepsilon$,

$$\theta(x) \geq (1 - \varepsilon)^2 \pi(x) \log(x) \implies \frac{\theta(x)}{x} \geq (1 - \varepsilon)^2 \frac{\pi(x) \log(x)}{x}.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit (I). □

Il ne reste plus qu'à montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1$. A priori, $\frac{\theta(x)}{x}$ pourrait ne pas être borné si $x \rightarrow \infty$.

Lemme 6.3 (Chebyshev). *On a que*

$$\theta(x) = O(x),$$

i.e. il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\theta(x) \leq C \cdot x, \quad \forall x \geq 1.$$

Preuve de la proposition. Le point de départ est le théorème binomial.

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} \geq \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \geq \prod_{p \in (n, 2n]} e^{\log p} = e^{\sum_{p \in (n, 2n]} \log p} = e^{\theta(2n) - \theta(n)}$$

En effet,

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{(n!)^2},$$

pour tout $p \in (n, 2n]$, $(n!)^2 \not\ll p$, donc

$$(n!)^2 \left| \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{p \in (n, 2n]} p} \right| \implies \prod_{p \in (n, 2n]} p \left| \frac{(2n)!}{(n!)^2} \right| \implies \frac{(2n)!}{(n!)^2} \geq \prod_{p \in (n, 2n]} p.$$

Comme $e > 2$, il s'ensuit que $2n > \log(2^{2n})$, donc

$$2n \geq \theta(2n) - \theta(n).$$

Maintenant, pour tout $x \geq 1$, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in [n, n+1)$, et donc

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \theta(n), \\ \theta(2x) - \theta(2n) &= \sum_{2n < p \leq 2x} \log(p) \leq \log(2x). \end{aligned}$$

Il s'ensuit (pour $x > 1$) que

$$\theta(2x) - \theta(x) \leq 2x + \log(2x), \quad \theta(x) - \theta\left(\frac{x}{2}\right) \leq x + \log(x).$$

Soit $m := \lfloor \log_2(x) \rfloor$, de sorte que

$$m \leq \log_2(x) < m+1 \implies 2^m \leq x < 2^{m+1} \implies 1 \leq \frac{x}{2^m} < 2.$$

On écrit alors une somme télescopique :

$$\theta(x) = [\theta(x) - \theta\left(\frac{x}{2}\right)] + [\theta\left(\frac{x}{2}\right) - \theta\left(\frac{x}{4}\right)] + \dots + [\theta\left(\frac{x}{2^{m-1}}\right) - \theta\left(\frac{x}{2^m}\right)] + \theta\left(\frac{x}{2^m}\right).$$

Donc,

$$\theta(x) \leq \theta\left(\frac{x}{2^m}\right) + \sum_{j=0}^{m-1} [\theta\left(\frac{x}{2^j}\right) - \theta\left(\frac{x}{2^{j+1}}\right)] \leq \theta\left(\frac{x}{2^m}\right) + \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{x}{2^j} + \log\left(\frac{x}{2^j}\right)\right).$$

Or, $1 < \frac{x}{2^m} \leq 2$, donc $\theta\left(\frac{x}{2^m}\right)$ est borné par une constante absolue $C_0 > 0$. De plus,

$$\sum_{j=0}^{m-1} \frac{x}{2^j} \leq x \cdot \sum_{j \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^j = 2x,$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} \log\left(\frac{x}{2^j}\right) &= \sum_{j=0}^{m-1} (\log(x) - j \log 2) = m \log(x) - \log(2) \frac{m(m-1)}{2} \\ &\leq m \log(x) \leq \log_2(x) \log(x) = \frac{\log(x)}{\log(2)} \log(x) = \frac{1}{\log(2)} \log(x)^2 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\theta(x) \leq C_0 + 2x + C_1 \log(x)^2 \leq 2x + C_2 \log(x)^2 \leq Cx$$

Ce qui conclut la preuve du lemme. □

Afin de montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1$, on doit montrer que l'intégrale suivante converge :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx. \quad (6.4)$$

En fait, selon le lemme suivant, ceci est suffisant.

Lemme 6.4. *Supposons que*

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx =: C$$

existe dans \mathbb{R} , alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1.$$

Remarque 6.5. Dans le cas où la limite existe, on devrait la noter

$$\int_1^\infty \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx.$$

Preuve du lemme. Supposons par l'absurde que le lemme est vrai mais que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\theta(x)}{x} \neq 1$. Alors, au moins une des deux affirmations suivantes est vraie :

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\theta(x)}{x} > 1, \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\theta(x)}{x} < 1.$$

Supposons la première, l'argument pour la deuxième est similaire. On peut alors trouver une suite $\{x_n\}_{n \geq 1}$, $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ et telle que $\exists \lambda > 1$ tel que

$$\frac{\theta(x_n)}{x_n} > \lambda, \quad \forall n \geq 1.$$

On obtient alors que

$$\int_{x_n}^{\lambda x_n} \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx \geq \int_{x_n}^{\frac{\lambda+1}{2} x_n} \frac{\lambda x_n - x}{x^2} dx \geq \frac{\lambda - 1}{2} x_n \int_{x_n}^{\frac{\lambda+1}{2} x_n} \frac{dx}{x^2} = \frac{\lambda - 1}{2} \cdot \left[1 - \frac{2}{\lambda + 1}\right] =: \alpha > 0.$$

En effet, $\theta(x)$ est croissante, on a que $\theta(x) \geq \lambda x_n$ sur $(x_n, \lambda x_n)$, et $\lambda x_n - x > 0$ sur $(x_n, \lambda x_n)$. Mais alors la limite (6.4) ne peut pas exister, en effet, cela impliquerait que

$$\int_{x_n}^{\lambda x_n} \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx = \int_1^{\lambda x_n} \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx - \int_1^{x_n} \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Ce qui conclut la preuve du lemme. □

Actuellement, la démonstration du théorème des nombres premiers a été réduite à la preuve de la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_1^\infty \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx \quad (6.5)$$

Jusqu'à maintenant, *aucune méthode d'analyse complexe n'a été employée*. La particularité de cette intégrale réside dans le fait que

$$\int_1^\infty \frac{\theta(x)}{x^2} dx, \quad \int_1^\infty \frac{x}{x^2} dx$$

ne convergent pas, mais il y a une compensation entre elles. Cette divergence est toutefois relativement faible, car si on change légèrement la forme de l'intégrale :

$$\int_1^\infty \frac{\theta(x)}{x^{s+1}} dx$$

avec $s > 1$, alors elle converge. On peut même supposer que $s \in \mathbb{C}$, à condition que $\Re(s) > 1$. La convergence de cette intégrale découle du lemme 6.3. En réalité, cette intégrale constitue un excellent point de départ pour une analyse plus détaillée : commençons par introduire la fonction

$$\Phi(s) := \sum_p \frac{\log p}{p^s}. \quad (6.6)$$

Lemme 6.6. *La somme définissant Φ converge localement uniformément et absolument tant que $\Re(s) > 1$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la relation

$$|p^s| = p^{\Re(s)},$$

et du fait que $\sum_p p^{-\Re(s)}$ converge pour tout $\Re(s) > 1$. □

Lemme 6.7. *On a la relation*

$$s \int_1^\infty \frac{\theta(x)}{x^{s+1}} dx = \Phi(s).$$

Démonstration. C'est essentiellement une intégration par parties : soit

$$s \int_1^\infty \frac{\theta(x)}{x^{s+1}} dx = \sum_{p_j} s \int_{p_j}^{p_{j+1}} \frac{\theta(x)}{x^{s+1}} dx + s \int_1^{p_1} \frac{\theta(x)}{x^{s+1}} dx,$$

où l'on a dénombré les premiers $2 = p_1 < p_2 < p_3 < \dots$. On a alors que $\theta(x) = \sum_{p \leq p_j} \log p$ pour tout $x \in [p_j, p_{j+1})$, et donc

$$s \int_{p_j}^{p_{j+1}} \frac{\theta(x)}{x^{s+1}} dx = (p_j^{-s} - p_{j+1}^{-s}) \cdot \sum_{p \leq p_j} \log p, \quad s \int_1^{p_1} \frac{\theta(x)}{x^{s+1}} dx = 0.$$

En sommant,

$$\sum_{j \geq 1} (p_j^{-s} - p_{j+1}^{-s}) \cdot \sum_{p \leq p_j} \log p = \sum_{j \geq 1} \frac{\log(p_j)}{p_j^s}.$$

En effet, soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (p_j^{-s} - p_{j+1}^{-s}) \sum_{k=1}^j \log(p_k) &= \sum_{k=1}^N \log(p_k) \sum_{j=k}^N (p_k^{-s} - p_{N+1}^{-s}) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{\log p_k}{p_k^s} - p_{N+1}^{-s} \sum_{k=1}^N \log(p_k). \end{aligned}$$

Or, par le lemme 6.3, $\theta(x) = O(x)$, donc $\theta(p_N)/p_{N+1}^s \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$. Ainsi,

$$\sum_{j \geq 1} (p_j^{-s} - p_{j+1}^{-s}) \cdot \sum_{p \leq p_j} \log p = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N (p_j^{-s} - p_{j+1}^{-s}) \sum_{k=1}^j \log(p_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \frac{\log p_j}{p_j^s} - \frac{\theta(p_N)}{p_{N+1}^s} = \sum_{j \geq 1} \frac{\log(p_j)}{p_j^s}.$$

Ce qui conclut la preuve du lemme. □

Pour avancer, nous devons maintenant comprendre la fonction $\Phi(s)$. En fait, comme vu précédemment, il est naturel de considérer l'argument comme un nombre complexe.

Cette fonction a une relation étroite avec une autre, bien plus connue, la célèbre *fonction zeta de Riemann* :

$$\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} n^{-s}, \quad \Re(s) > 1. \quad (6.7)$$

La somme converge absolument et localement uniformément dans la région indiquée et définit donc une fonction holomorphe sur cette région dite. La relation de cette fonction et la distribution des nombres premiers fut initialement découverte par Euler, qui observa ce qui suit.

Proposition 6.8. *Nous avons l'identité*

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad \Re(s) > 1.$$

Démonstration. En posant la relation $|p^{-s}| = p^{-\Re(s)} < 1$ avec $\Re(s) > 0$, on peut déduire que l'expression suivante

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{j=0}^{\infty} p^{-js}$$

converge absolument et localement uniformément sur la région $\Re(s) > 0$. On peut alors réécrire le produit de la manière suivante :

$$\prod_{1 < p < p_*} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod_{1 < p < p_*} \sum_{j=0}^{\infty} p^{-js} = \prod_{1 < p < p_*} (1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots) = \sum_{a=0}^{\infty} n_a^{-s}, \quad \Re(s) > 1$$

où on définit $\{n_a\}_{a=0}^{\infty}$ l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ dont les facteurs premiers sont strictement inférieurs à p_* . On peut alors écrire une nouvelle somme :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-s} - \prod_{1 < p < p_*} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-s} - \sum_{a=0}^{\infty} n_a^{-s} = \sum_{b=0}^{\infty} n_b^{-s}$$

où on définit $\{n_b\}_{b=0}^{\infty}$ l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ qui possède au moins un facteur premier supérieur ou égal à p_* . Finalement, on peut écrire

$$\left| \sum_{b=0}^{\infty} n_b^{-s} \right| \leq \left(\sum_{p \geq p_*} |p^{-s}| \right) \cdot \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |n|^{-s} \right), \quad \Re(s) > 1$$

qui tend vers 0 lorsque $p_* \rightarrow +\infty$, alors l'expression initiale est montrée. \square

On a donc montré que le produit $\prod_{1 < p < p_*} \frac{1}{1 - p^{-s}}$ converge localement uniformément vers $\zeta(s)$ dans la région $\Re(s) > 1$, de plus, on voit que

$$\prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} > 0, \quad \Re(s) > 1$$

on peut alors déduire que

$$\log \left(\prod_{1 < p < p_*} \frac{1}{1 - p^{-s}} \right) \xrightarrow{p_* \rightarrow +\infty} \log(\zeta(s)), \quad \Re(s) > 1$$

est une convergence localement uniforme. Cela signifie que les dérivées de ces fonctions convergent également localement uniformément dans cette même région, alors, cette relation s'applique également aux dérivées de ces fonctions et on peut écrire

$$(\log(\zeta(s)))' = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \lim_{p_* \rightarrow +\infty} \sum_{1 < p < p_*} (-\log(1 - p^{-s}))' = - \lim_{p_* \rightarrow +\infty} \sum_{1 < p < p_*} \frac{\log(p)}{p^s - 1}$$

Tant que $\Re(s) > 1$, on va alors réécrire l'expression

$$\frac{\log(p)}{p^s - 1} = \frac{p^s \log(p)}{p^s(p^s - 1)} = \frac{(p^s - 1) \log(p) + \log(p)}{p^s(p^s - 1)} = \frac{\log(p)}{p^s} + \frac{\log(p)}{p^s(p^s - 1)}$$

Ce qui nous permet de conclure

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \frac{\log(p)}{p^s - 1} = \sum_p \frac{\log(p)}{p^s} + \sum_p \frac{\log(p)}{p^s(p^s - 1)} = \Phi(s) + \sum_p \frac{\log(p)}{p^s(p^s - 1)}$$

Ce qui permet d'établir le lien entre la fonction ζ et la fonction Φ .

La deuxième somme converge en fait sur $\Re(s) > \frac{1}{2}$ et que la fonction $s \mapsto \sum_p \frac{\log(p)}{p^s(p^s - 1)}$ est holomorphe sur cette même région.

Notre but est à présent d'étendre l'ensemble de définition de la fonction ζ , pour ce faire, nous allons démontrer la proposition suivante :

Proposition 6.9. *La fonction $\zeta(s)$ définie sur $\Re(s) > 1$ peut être prolongée de manière holomorphe à $\Re(s) > 0$ où $s = 1$ est un pôle simple.*

Démonstration. Commençons par considérer la région $\Re(s) > 1$ et comparons la somme $\sum_{n \geq 1}^{\infty} n^{-s}$ à l'intégrale $\int_1^{\infty} x^{-s} dx$ qui converge localement uniformément autour de s .

Commençons par calculer explicitement l'intégrale :

$$\int_1^{\infty} x^{-s} dx = \frac{1}{s-1}, \quad \Re(s) > 1$$

Cette fonction est méromorphe sur \mathbb{C} avec un pôle simple en $s = 1$, Ensuite, voyons que

$$\left| \sum_{n \geq 1} n^{-s} - \int_1^{\infty} x^{-s} dx \right| \leq \sum_{n \geq 1} \int_n^{n+1} |n^{-s} - x^{-s}| dx$$

cependant, pour $x \in [n, n+1]$, on a

$$|n^{-s} - x^{-s}| \leq |s| \cdot |n|^{-\Re(s)-1}$$

Alors,

$$\sum_{n \geq 1} \int_n^{n+1} |n^{-s} - x^{-s}| dx \leq |s| \sum_{n \geq 1} |n|^{-\Re(s)-1}$$

Et cette somme converge localement uniformément pour $\Re(s) > 0$ ce qui implique que la somme

$$s \mapsto \sum_{n \geq 1} \left[n^{-s} - \int_n^{n+1} x^{-s} dx \right]$$

converge à une fonction analytique sur le demi plan $\Re(s) > 0$

□

Cette preuve nous montre que la fonction $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ peut être prolongée analytiquement à $\Re(s) > 0$. Il nous reste maintenant à montrer que la fonction $\zeta(s)$ ne s'annule pas sur $\{\Re(z) \geq 1\}$ et nous permet d'étendre $\Phi(s)$ de manière holomorphe jusqu'à un voisinage de $\Re(s) > 1$ l'argument vient de la Vallée-Poussin et Hadamard

Proposition 6.10. *Il n'y a pas de $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\zeta(1 + i\alpha) = 0$.*

Démonstration. On peut utiliser la relation (??) pour $\Re(s) > 1$. Notons que cette relation, et le fait que $\zeta(s)$ et la somme de droite s'étendent holomorphiquement à $\Re(s) > \frac{1}{2}$ excepté pour la pôle simple de ζ à $s = 1$, implique que (en prenant $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$),

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \Phi(1 + \varepsilon) = 1,$$

En raison du pôle simple de $\zeta(s)$ en $s = 1$. De plus, en supposant que $1 + i\alpha$ est un zéro d'ordre $\mu > 0$ de ζ , et que $1 + 2i\alpha$ est un zéro d'ordre $\nu \geq 0$, on obtient (puisque $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$)

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \Phi(1 + \varepsilon \pm i\alpha) &= -\mu, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \Phi(1 + \varepsilon \pm i2\alpha) &= -\nu. \end{aligned}$$

Observons maintenant l'astuce suivante, assez magique : pour $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{r=-2}^2 \left(\frac{4}{2+r} \right) \Phi(1 + \varepsilon + ir\alpha) &= \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} \sum_{r=-2}^2 \left(\frac{4}{2+r} \right) p^{-ir\alpha} \\ &= \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} (p^{i\alpha/2} + p^{-i\alpha/2})^4 \geq 0. \end{aligned}$$

Il est bien sûr essentiel ici que $p^{i\alpha/2} + p^{-i\alpha/2} \in \mathbb{R}$.

Mais alors, en utilisant les relations de limite ci-dessus, on conclut que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \sum_{r=-2}^2 \left(\frac{4}{2+r} \right) \Phi(1 + \varepsilon + ir\alpha) = 6 - 2\nu - 8\mu \geq 0.$$

Ce qui est impossible, puisque $\mu \in \mathbb{N}$, et donc $8\mu + 2\nu \geq 8$. □

Le lemme précédent implique qu'il existe un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ contenant $\Re s \geq 1$, et tel que $\zeta(s)$ soit holomorphe sur $U \setminus \{1\}$ et n'y s'annule pas. Par conséquent, la fonction

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

se prolonge analytiquement à $U \setminus \{1\}$, et il en va de même pour Φ . De plus, la fonction

$$s^{-1}\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$$

est analytique sur tout U .

Avec tout ce travail accompli, revenons maintenant à l'intégrale réelle (0.5), et montrons qu'elle converge effectivement. Rappelons que le lien entre θ et Φ provient du Lemme 0.5. On observe maintenant que ce lemme implique que

$$s^{-1}\Phi(s) - \frac{1}{s-1} = \int_1^\infty \frac{\theta(x) - x}{x^{s+1}} dx, \quad \Re s > 1.$$

La limite lorsque $s \rightarrow 1$ de l'expression du membre de gauche existe, de sorte que la limite de l'intégrale existe également, mais on ne peut pas conclure a priori que cette limite abstraite est

égale à $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx$. Ce point est subtil, et nous allons utiliser un argument très direct et ingénieux, dû à D. J. Newman en 1980(!), pour en déduire la conclusion désirée. L'idée clef est une sorte de "résultat taubérien". Pour motiver cela, commençons par changer de variable dans (0.10) et réécrivons cette égalité sous la forme

$$\begin{aligned} s^{-1}\Phi(s) - \frac{1}{s-1} &= \int_0^\infty \frac{\theta(e^t) - e^t}{e^{ts}} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-1)t} \frac{\theta(e^t) - e^t}{e^t} dt, \quad \Re s > 1. \end{aligned}$$

Remarquons que le Lemme 6.3 implique que

$$\frac{\theta(e^t) - e^t}{e^t}$$

est bornée. La proposition suivante est alors exactement ce dont nous avons besoin pour conclure enfin :

Proposition 6.11. *Soit f bornée et continue par morceaux sur $[0, \infty)$, et supposons que la fonction*

$$g(z) := \int_0^\infty e^{-tz} f(t) dt, \quad \Re z > 0,$$

se prolonge holomorphiquement à un voisinage de $\Re z \geq 0$. Alors

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f(t) dt = g(0),$$

et cette limite existe donc.

Le théorème des nombres premiers découle de ceci en prenant

$$f(t) = \frac{\theta(e^t) - e^t}{e^t}, \quad g(z) = (z+1)^{-1}\Phi(z+1) - \frac{1}{z}.$$

Preuve (proposition). Nous suivons la présentation de Zagier. Pour chaque $T > 0$, introduisons la fonction entière

$$g_T(z) := \int_0^T f(t)e^{-tz} dt.$$

Alors, tant que $\Re z > 0$, on a

$$g(z) - g_T(z) = \int_T^\infty f(t)e^{-tz} dt. \tag{6.8}$$

Par ailleurs, par hypothèse, la fonction $g - g_T$ se prolonge holomorphiquement à un voisinage de $\Re z \geq 0$. Nous allons maintenant faire une application délicate de la formule intégrale de Cauchy. Pour cela, fixons $\delta > 0$ ainsi que $R \geq 1$, et considérons la frontière C du domaine

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R, \Re z \geq -\delta\}.$$

Ainsi C est constituée (un peu plus que) d'un demi-cercle et d'un segment de droite contenu dans la droite $\Re z = -\delta$. Si l'on fixe R grand (nous ferons finalement tendre R vers $+\infty$), puis que l'on choisit $\delta > 0$ assez petit en fonction de R , alors la courbe C est entièrement contenue dans le domaine d'holomorphie de $g - g_T$. De plus, nous paramétrons C de manière à le parcourir

une fois dans le sens direct (sens anti-horaire). Appliquons maintenant le théorème de Cauchy à la fonction (c'est ici la partie délicate)

$$h(z) := (g - g_T)(z)e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right).$$

Nous obtenons alors

$$h(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{h(z)}{z} dz, \quad (6.9)$$

ce qui implique

$$(g - g_T)(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (g - g_T)(z)e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) z^{-1} dz.$$

Pour estimer l'intégrale à droite, nous décomposons $C = C_1 \cup C_2$, où $C_1 = C \cap \{\Re z > 0\}$. D'après (6.8), on obtient alors (pour $\Re z > 0$)

$$|(g - g_T)(z)| = \left| \int_T^\infty f(t)e^{-tz} dt \right| \leq \int_T^\infty |f(t)| |e^{-tz}| dt \leq B \frac{e^{-T\Re z}}{\Re z},$$

où B est une borne supérieure de $|f|$. Bien sûr, cette expression diverge lorsque $\Re z \rightarrow 0$, mais le facteur supplémentaire $(1 + z^2/R^2)z^{-1}$ a été choisi pour compenser cela. En effet, on a

$$\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) z^{-1} = z^{-1} + \frac{z}{R^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} + \frac{z}{R^2} = \frac{2\Re z}{R^2},$$

où la dernière égalité est valable pour $|z| = R$, ce qui est le cas sur la trajectoire C_1 . Il s'ensuit que pour $z \in C_1$, on a

$$|(g - g_T)(z)e^{zT} (1 + z^2/R^2)z^{-1}| \leq B \frac{e^{-T\Re z}}{\Re z} e^{T\Re z} \frac{2\Re z}{R^2} = \frac{2B}{R^2}.$$

Il en découle que

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} (g - g_T)(z)e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) z^{-1} dz \right| \leq \frac{2B}{R}.$$

Passons maintenant à la partie C_2 . Ici, nous considérons R , puis $\delta > 0$ fixés et choisissons T grand. Cela ne modifie pas la borne précédente sur la portion C_1 , où la borne est indépendante de T . On remarque ensuite que, sur C_2 , on a

$$|g(z)e^{zT} (1 + z^2/R^2)z^{-1}| \leq E \delta^{-1} e^{T\Re z},$$

où E est indépendante de T . Comme $\lim_{T \rightarrow +\infty} e^{T\Re z} = 0$ dès que $\Re z < 0$, on montre aisément que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} g(z)e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) z^{-1} dz \right| = 0.$$

Il reste à majorer la contribution de la fonction entière $g_T(z)$ sur C_2 . Pour cela, nous pouvons simplement remplacer la trajectoire C_2 par l'arc demi-circulaire

$$C'_2 := \{|z| = R, \Re z < 0\}.$$

Alors

$$|g_T(z)| = \left| \int_0^T f(t)e^{-tz} dt \right| \leq B \frac{e^{-T\Re z}}{|\Re z|}, \quad \Re z < 0,$$

et l'on obtient

$$|g_T(z)e^{zT}(1+z^2/R^2)z^{-1}| \leq B \frac{e^{-T\Re z}}{|\Re z|} \cdot \frac{2|\Re z|}{R^2} \cdot e^{T\Re z} = \frac{2B}{R^2}.$$

Nous en concluons que

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} g_T(z)e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) z^{-1} dz \right| \leq \frac{2B}{R}.$$

Au total, nous avons montré que

$$\limsup_{T \rightarrow +\infty} |(g - g_T)(0)| \leq \frac{4B}{R}.$$

Mais comme $R > 0$ était arbitraire, en laissant $R \rightarrow +\infty$ nous déduisons que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} (g(0) - g_T(0)) = 0.$$

C'est exactement ce que nous voulions démontrer. □

Remarque 6.12. Pour apprécier la subtilité de la dernière proposition, l'exemple suivant peut être utile : les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign } x \cdot \cos(\xi x)}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

convergent pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$, au sens où

$$\lim_{M, N \rightarrow +\infty} \int_{-M}^N \frac{\text{sign } x \cdot \cos(\xi x)}{\sqrt{1+x^2}} dx = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^*.$$

En particulier, on a

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \xi \neq 0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign } x \cdot \cos(\xi x)}{\sqrt{1+x^2}} dx = 0.$$

Cependant, l'intégrale limite

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign } x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

n'est pas bien définie, puisque

$$\lim_{M, N \rightarrow +\infty} \int_{-M}^N \frac{\text{sign } x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

n'existe pas ! □

Chapitre 7

Applications conformes

Définition 7.1 (Biholomorphe). Soient $U, V \subseteq \mathbb{C}$ des domaines, alors, on appelle une application

$$f : U \rightarrow V$$

une transformation conforme pourvu que f est holomorphe et admette un inverse $f^{-1} : V \rightarrow U$ holomorphe.

Remarque 7.2. Parfois, dans la littérature, le nom "application conforme" fait référence à d'autres types de fonctions. Pour cette raison, dans le cadre de ce cours, on va préférer le terme "biholomorphe".

Exemple 7.3. Soient $U = D(0, 1)$ et $V = \mathbb{C}$, on se demande s'il existe un biholomorphisme entre U et V ?

Remarquons que, si une telle fonction existait, on aurait que son inverse $f^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow D(0, 1)$ serait une fonction entière (holomorphe sur tout \mathbb{C}) et bornée (à valeurs dans $D(0, 1)$) ce qui n'est pas possible par Liouville. De fait, une telle fonction ne peut pas exister.

Exemple 7.4. Soient $U = D(0, 1)$ et $V = D(0, 1) \setminus \{0\}$, on se demande s'il existe un biholomorphisme entre U et V ?

On peut montrer que ce n'est pas le cas par un argument topologique :

Supposons qu'il existe $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1) \setminus \{0\}$ biholomorphe, alors, $f^{-1} : D(0, 1) \setminus \{0\} \rightarrow D(0, 1)$ holomorphe.

On considère le lacet $\gamma : [0, 1] \rightarrow V, t \mapsto \frac{1}{2}e^{2\pi it}$. On a alors que

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i \implies \gamma \text{ n'est pas contractible en } V$$

Cependant, on peut considérer la composition $f^{-1} \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow D(0, 1)$ et, en particulier, la famille de lacets contractés :

$$\Gamma : \begin{array}{ll} [0, 1] \times [0, 1] & \rightarrow D(0, 1) \\ (s, t) & \rightarrow f(s(f^{-1} \circ \gamma)(t)) \end{array}$$

qui nous donne bien une contraction de γ en V .

Théorème 7.5 (Théorème de Riemann). *Si $V \subseteq \mathbb{C}$ est un domaine, alors, il existe un biholomorphisme*

$$f : D(0, 1) \rightarrow V$$

si et seulement si V est simplement connexe et $V \neq \mathbb{C}$

Remarque 7.6. La preuve de ce théorème requiert des outils qui dépassent le cadre de ce cours. Elle est donc laissée en exercice.

7.1 Fonction biholomorphes $f : U \rightarrow U$

On veut à présent s'intéresser à un cas particulier de biholomorphicité; le cas où $U = V$.

Lemme 7.7. $Aut(U) := \{f : U \rightarrow U \text{ biholomorphe}\}$ a une structure de groupe muni de la composition de fonctions.

Démonstration. Soient $f, g \in Aut(U)$, alors $f \circ g : U \rightarrow U$ est clairement biholomorphe.

Chaque élément admet un inverse par définition de la biholomorphicité.

L'identité fait office d'élément neutre. □

7.1.1 Fonctions biholomorphes $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$

Cas $f(0) = 0$

On veut à présent réduire notre étude au cas $Aut(D(0, 1))$. On se limite pour l'instant au cas $f(0) = 0$

Lemme 7.8 (Schwarz). *Un f comme défini ci-dessus a la forme $f(z) = a \cdot z$ avec $a \in S^1 = \partial D(0, 1)$, c'est-à-dire que $f(z) = e^{i\theta} z$ avec $\theta \in \mathbb{R}$*

Démonstration. Introduisons $g(z) = \frac{f(z)}{z}$, à priori définie en $D(0, 1) \setminus \{z\}$, on remarque

$$\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0)$$

Alors g est holomorphe en $D(0, 1)$ si on pose $g(0) = f'(0)$.

En appliquant le principe du maximum à la fonction $g(z)$ sur $\overline{D(0, 1 - \varepsilon)}$, on sait que $\forall z \in D(0, 1 - \varepsilon)$,

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq \max_{z \in \partial D(0, 1 - \varepsilon)} |g(z)| \\ &= \max_{z \in \partial D(0, 1 - \varepsilon)} \frac{|f(z)|}{|z|} \\ &< \frac{1}{1 - \varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0^+ \\ \implies |g(z)| &\leq 1, \quad \forall z \in D(0, 1) \end{aligned}$$

Il suit que, pour $z = 0$, $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$ et on applique le même argument à l'inverse $f^{-1} : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ pour trouver que

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{|f'(0)|} \geq 1 \implies |f'(0)| = 1$$

Alors 0 est un maximum local pour g et g est une constante $a \in S^1$, et donc $f(z) = z \cdot a = e^{i\theta} z$, $\theta \in \mathbb{R}$. □

Cas $f(0) = b \in D(0, 1)$

On cherche maintenant à trouver la forme que prennent les fonctions biholomorphes sur $D(0, 1)$ dans le cas général (c'est-à-dire qui ne fixe pas forcément l'origine).

Soit maintenant $f \in Aut(D(0, 1))$ arbitraire. Soit $f(0) = b \in D(0, 1)$. Un cas spécial :

$$g(z) = \frac{z + b}{1 + z\bar{b}}$$

D'après un exercice, $|z\bar{b}| = |z| \cdot |\bar{b}| < 1$ pour $z \in D(0, 1)$. L'inverse de g est donné par

$$\frac{z - b}{1 - z\bar{b}},$$

donc g est biholomorphe. De plus on sait que $g(0) = b = f(0)$. Soit $h(z) := g^{-1}f \in \text{Aut}(D(0, 1))$, on a donc que $h(0) = 0$. D'après le lemme 7.8, on a donc que $h(z) = e^{i\theta} \cdot z$, $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(z) = g(e^{i\theta} \cdot z) = \frac{e^{i\theta} \cdot z + b}{1 + e^{i\theta} \cdot z\bar{b}} = e^{i\theta} \cdot \frac{z + e^{-i\theta}b}{1 + z \cdot \overline{e^{-i\theta}b}} = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - z\bar{a}}, \quad a = e^{-i\theta} \cdot b \in D(0, 1).$$

Théorème 7.9. *On a une caractérisation des fonctions biholomorphes :*

$$\text{Aut}(D(0, 1)) = \{f : D(0, 1) \longrightarrow D(0, 1) \mid f(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z - a}{1 - z\bar{a}}, \theta \in \mathbb{R}, a \in D(0, 1)\}.$$

7.2 Conséquences du théorème de Riemann

Le théorème entraîne une caractérisation de $\text{Aut}(U)$ pour tout U simplement connexe et différent de \mathbb{C} . On sait qu'il existe un biholomorphisme entre $D(0, 1)$ et U par le théorème de Riemann 7.5. Si $f : U \rightarrow U$ est biholomorphe, l'application $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$:

$$\begin{array}{ccc} D(0, 1) & \xrightarrow{\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi} & D(0, 1) \\ \varphi \downarrow & & \uparrow \varphi^{-1} \\ U & \xrightarrow{f} & U \end{array}$$

a un inverse $\varphi^{-1} \circ f^{-1} \circ \varphi$. D'après le théorème précédent, on a

$$\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - z\bar{a}} =: M_{\theta, a}(z) \implies \varphi \circ M_{\theta, a} \circ \varphi^{-1} = f.$$

7.2.1 Un cas spécial : $U = \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$

D'après le théorème de Riemann 7.5, il existe un biholomorphisme $\varphi : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{H}$.

Proposition 7.10. *L'application*

$$\varphi(z) := i \frac{1 - z}{1 + z}$$

est un biholomorphisme entre $D(0, 1)$ et \mathbb{H} .

Démonstration. 1. φ est holomorphe pour $z \in D(0, 1)$: $1 + z \neq 0$ pour $z \in D(0, 1)$.

2. $\varphi(D(0, 1)) \subset \mathbb{H}$: on écrit $\varphi(z) = i \frac{(1-z)(1+\bar{z})}{|1+z|^2} = i \frac{(1-z\bar{z}+\bar{z}-z)}{|1+z|^2}$, alors $\Im(\varphi(z)) = \frac{1-|z|^2}{|1+z|^2} > 0$ pour $z \in D(0, 1)$.

3. φ est injective : si $w \in \mathbb{H}$, et

$$\varphi(z) = w \iff i \frac{1 - z}{1 + z} = w \iff w + wz = i - iz \iff z = \frac{i - w}{i + w} \implies z \text{ unique. déterminé.}$$

4. φ est surjective : si $w \in \mathbb{H}$, $w = a + bi$, $b > 0$, alors $z = \frac{i-w}{i+w} \in D(0, 1)$, parce que $|i - w| = \sqrt{(1 - b)^2 + a^2} < |i + w| = \sqrt{(1 + b)^2 + a^2}$, $b > 0$.

□

Théorème 7.11. *On a la caractérisation suivante des fonctions biholomorphes sur \mathbb{H} :*

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) \simeq PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) / (A \sim -A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), ad - bc = 1 \right\} / (A \sim -A),$$

où $PSL(2, \mathbb{R})$ est le groupe Spécial Linéaire Projectif et $A \sim -A$ est la relation d'équivalence où on identifie les matrices qui ne diffèrent que par un signe.

Démonstration. On sait que $\text{Aut}(\mathbb{H}) = \{\varphi \circ M_{\theta, a} \circ \varphi^{-1}, \theta \in \mathbb{R}, a \in D(0, 1)\}$, $\varphi(z) = i \cdot \frac{1-z}{1+z}$, alors

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) = \left\{ \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\}$$

(la dernière égalité est laissée en exercice).

Donc $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$. On définit alors une application

$$\Phi : \begin{matrix} SL(2, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \text{Aut}(\mathbb{H}) \\ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} & \longmapsto & \left(z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right) \end{matrix}.$$

Φ est un homomorphisme de groupes, soient $q_1(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, $q_2(z) = \frac{\alpha' z + \beta'}{\gamma' z + \delta'}$, avec

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}).$$

On calcule la composée $\varphi = q_1 \circ q_2$:

$$\varphi(z) = q_1(q_2(z)) = \frac{\alpha \frac{\alpha' z + \beta'}{\gamma' z + \delta'} + \beta}{\gamma \frac{\alpha' z + \beta'}{\gamma' z + \delta'} + \delta} = \frac{\alpha(\alpha' z + \beta') + \beta(\gamma' z + \delta')}{\gamma(\alpha' z + \beta') + \delta(\gamma' z + \delta')} = \frac{(\alpha\alpha' + \beta\gamma')z + (\alpha\beta' + \beta\delta')}{(\gamma\alpha' + \delta\gamma')z + (\gamma\beta' + \delta\delta')}$$

donc φ est encore de la forme $(\tilde{\alpha}z + \tilde{\beta})/(\tilde{\gamma}z + \tilde{\delta})$, avec

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} & \tilde{\delta} \end{pmatrix} = AA' = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma' & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix}.$$

Autrement dit,

$$\Phi(AA') = \Phi(A) \circ \Phi(A').$$

Donc Φ est bien un homomorphisme de groupes. Si $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ est tel que $\Phi(A)$ soit l'identité,

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = z, \quad \forall z \in \mathbb{H},$$

alors on obtient l'égalité,

$$\alpha z + \beta = z(\gamma z + \delta) = \gamma z^2 + \delta z,$$

d'où $\gamma = 0$, $\alpha = \delta$ et $\beta = 0$. La condition $\det A = 1$ impose alors $\alpha^2 = 1$, donc $\alpha = \pm 1$ et $A = \pm I_2$. Ainsi, $\ker(\Phi) = \{\pm I_2\}$. On en déduit que Φ induit un morphisme injectif

$$\bar{\Phi} : PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) / (A \sim -A) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}).$$

Par la description initiale d' $\text{Aut}(\mathbb{H})$, toute transformation $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ avec $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ est l'image d'une matrice de $SL(2, \mathbb{R})$, donc $\bar{\Phi}$ est surjective. On a donc un isomorphisme de groupes

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) = SL(2, \mathbb{R}) / (A \sim -A) = PSL(2, \mathbb{R}).$$

□

Chapitre 8

Analyse vectorielle dans \mathbb{R}^n

Définition 8.1. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, on appelle

1. $f : U \rightarrow \mathbb{R} \in C^k(U, \mathbb{R})$, $k \geq 0$, un *champ scalaire* ;
2. $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un *champ vectoriel*. Si \mathbf{f} est k fois continûment différentiable, $k \geq 1$, alors $\mathbf{f} \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$. Si \mathbf{f} est infiniment différentiable, alors $\mathbf{f} \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$.

Définition 8.2. Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ un champ scalaire. Alors on appelle

$$\mathbf{g} = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

le *gradient* de f . Dans ce cas, on dit que le champ vectoriel \mathbf{g} dérive d'un champ scalaire f .

8.1 Notions d'intégrations

8.1.1 Intégrale curviligne d'un champ scalaire le long d'un chemin

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ un chemin (C^1 par morceaux). On peut introduire

$$\int_{\gamma} f \, ds =: \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt, \quad f \in C^0(U, \mathbb{R})$$

où $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n [\gamma'_i(t)]^2}$. (c.f. *differential geometry I*)

Exemple 8.3. 1. Si $f = 1$, l'intégrale correspond à la longueur du chemin.

2. Si $f = \rho \geq 0$, si ρ correspond à une densité de masse, alors $\int_{\gamma} f \, ds$ représente la masse totale d'un fil matériel.

Remarque 8.4. $\int_{\gamma} f \, ds$ est invariante sous reparamétrisation. C'est analogue à la propriété pour $\int_{\gamma} f \, dz$ (complexe), cependant $\int_{-\gamma} f \, ds \neq -\int_{\gamma} f \, ds$.

8.1.2 Circulation d'un champ vectoriel le long d'un chemin

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un domaine, $\mathbf{f} \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$ un champ vectoriel et $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ un chemin. Alors,

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \mathbf{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt, \quad (8.1)$$

où \cdot est le produit scalaire euclidien de deux vecteurs.

Remarque 8.5. (8.1) est invariant sous reparamétrisation du chemin.

Remarque 8.6. Soient γ_1, γ_2 deux chemins et \mathbf{f} comme ci-dessus.

$$\int_{-\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s},$$

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}.$$

Remarque 8.7. Relation avec $\int_{\gamma} f dz$ si $n = 2$:

$$f \in C^0(U, \mathbb{C}), U \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \implies f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \iff \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Alors si $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$,

$$\int_{\gamma} f dz = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^1 (u + iv)(\gamma'_1 + i\gamma'_2)(t) dt = \int_0^1 (u\gamma'_1 - v\gamma'_2) dt + i \int_0^1 (u\gamma'_2 + v\gamma'_1) dt$$

Si on pose $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$ et $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$, alors

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma} \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{s} + i \int_{\gamma} \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{s}.$$

Question naturelle

Quand est-ce que $\int_{\gamma} \mathbf{f} ds$ ne dépend que du point initial et du point final de γ ?

Soient $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow U$ où $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = b$.

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \iff \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (8.2)$$

où γ est un lacet arbitraire.

Proposition 8.8. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un domaine et $\mathbf{f} \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$. Alors l'intégrale (8.1) ne dépend que des points initiaux et finaux de γ si et seulement si \mathbf{f} dérive d'un potentiel scalaire

$$\iff \exists g \in C^1(U, \mathbb{R}) \text{ tel que } \mathbf{f} = \nabla g.$$

Démonstration. (si) Supposons que $\mathbf{f} = \nabla g$, alors

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \nabla g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(g(\gamma(t))) dt = g(\gamma(t)) - g(\gamma(0)) = g(b) - g(a).$$

(seulement si) Inversement, supposons (8.2). Déduisons que \mathbf{f} dérive d'un potentiel scalaire. Fixons un $p \in U$, et définissons $g(x) = \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$, où γ est un chemin qui lie p à x dans U . Ceci est indépendant du chemin précis de γ , à cause de (8.2). Il faut vérifier que $\nabla g = \mathbf{f} \iff \frac{\partial g}{\partial x_j} = f_j$. Pour lier x à $x + he_j$, on utilise $\hat{\gamma}(t) = x + the_j$

$$\begin{aligned} g(x + he_j) &= \int_{\gamma \oplus \hat{\gamma}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\hat{\gamma}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = g(x) + \int_0^1 \mathbf{f}(x + the_j) \cdot he_j dt \\ &= g(x) + \int_0^1 h f_j(x) + o(|h|) dt \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + he_j) - g(x)}{h} = f_j(x). \end{aligned}$$

□

Remarque 8.9 (Quelques calculs explicites). Voyons que $\mathbf{f} = \nabla g$ avec $g \in C^2(U, \mathbb{R})$ si et seulement $f_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial g}{\partial x_j}$ avec $j = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$$

Une condition nécessaire pour que $\mathbf{f} \in C^1(U, \mathbb{R})$ soit dérivée d'un potentiel est alors que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = 0, \quad \forall j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Cependant, dans le cadre du cours, on va se restreindre au cas $n \in \{2, 3\}$, on peut alors donner une caractérisation plus explicite :

$$\begin{aligned} n = 2 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= 0 \\ n = 3 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2} &= \frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0 \end{aligned}$$

Remarque 8.10 (Notations). Si $n = 2$, on appelle le champ scalaire donné par $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ le rotationnel de \mathbf{f} noté $\text{rot}(\mathbf{f})$.

Si $n = 3$, on appelle champ vectoriel :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \text{rot}(\mathbf{f})$$

Alors \mathbf{f} dérive d'un potentiel et $\mathbf{f} \in C^1(U, \mathbb{R}) \implies \text{rot}(\mathbf{f}) = 0$.

En effet, soit $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction qui dérive d'un potentiel. Alors il existe $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{f} = \nabla g = (\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_3})$. On suppose que $\mathbf{f} \in C^1(U, \mathbb{R})$, alors les f_i sont C^1 , $i = 1, 2, 3$. Donc $g \in C^2$, et par le théorème de Schwarz (analyse II),

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3.$$

Considérons le rotationnel $\text{rot}(\mathbf{f})$, $(\text{rot}(\mathbf{f}))_1 = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_3 \partial x_2} = 0$. On trouve de la même manière que $(\text{rot}(\mathbf{f}))_{2,3} = 0$ et donc $\text{rot}(\mathbf{f}) = 0$.

En général, l'implication inverse n'est pas vérifiée mis à part sous certaines conditions topologiques naturelles.

Proposition 8.11. Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ (pour $n = 2, 3$) est simplement connexe et si $\mathbf{f} \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ satisfait $\text{rot}(\mathbf{f}) = 0$, alors, \mathbf{f} dérive d'un potentiel.

Théorème 8.12 (Green-Riemann). Soit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine, $\mathbf{f} \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$, et soit V un sous-domaine de U tel que $\bar{V} \subset U$. On suppose que le bord de V est un lacet $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ simple, régulier, orienté positivement. Alors

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \, ds = \iint_V \text{rot}(\mathbf{f}) \, dx \, dy,$$

où $\text{rot}(\mathbf{f}) = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$.

Remarque 8.13. " γ simple et régulier" :

$$\gamma \in C^1([0, 1], U) \text{ avec } \gamma'(0) = \gamma'(1), \gamma'(t) \neq 0, \forall t \in [0, 1] \text{ et } \gamma \text{ injective sur } [0, 1]$$

Remarque 8.14. Le théorème de Green-Riemann est valable dans un contexte beaucoup plus général avec des bords qui sont réguliers par morceaux

La preuve de Green-Riemann passe par 2 étapes :

1. Réduction à une situation plus standard, domaine de type 1 ou 2 :

$$\text{type 1 : } \{(x, y) \mid a < x < b, : \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\},$$

$$\text{type 2 : } \{(x, y) \mid c < y < d, : \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}.$$

Sur ces domaines, on sait faire des intégrales doubles.

2. Démonstration pour des domaines de ce type spécial et utilisation du théorème fondamental de l'analyse et d'une partition de l'unité.

L'idée de la preuve est de décomposer le domaine V en une famille de sous-domaines V_1, V_2, \dots, V_N de type 1 ou 2 et de décomposer \mathbf{f} en une somme de champs à support compact dans ces sous-domaines. On cherche en fait à écrire

$$\mathbf{f} = \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_j, \quad \text{supp}(\mathbf{f}_j) \subset V_j$$

Parce que si on connaît Green-Riemann pour chaque \mathbf{f}_j sur son domaine simple V_j , on aura

$$\int_{\partial V} \mathbf{f}_j ds = \iint_V \text{rot}(\mathbf{f}_j) dx dy$$

(et en fait, l'intégrale de surface se réduit à V_j puisque $\mathbf{f}_j = 0$ ailleurs). En sommant sur j , on obtient

$$\int_{\partial V} \mathbf{f} ds = \sum_{j=1}^N \int_{\partial V} \mathbf{f}_j ds = \sum_{j=1}^N \iint_V \text{rot}(\mathbf{f}_j) dx dy,$$

et en manipulant un peu, on arrive à $\iint_V \text{rot}(\mathbf{f})$. Pour réaliser cette décomposition, on introduit des fonction $\phi_j \in C_0^\infty(V_j)$ et on pose $\mathbf{f}_j = \phi_j \cdot \mathbf{f}$ et on doit s'assurer que $\sum_{j=1}^N \phi_j(x) = 1$ pour tout $x \in \bar{V}$.

Remarque 8.15. On note $\phi_0^\infty(V_j)$ pour dire que la fonction est infiniment dérivable et à support compact

Proposition 8.16 (Partition de l'unité). *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble compact, soient U_i, V_i pour $i = 1, \dots, N$ des domaines ouverts tels que $\bar{U}_i \subset V_i$, chaque U_i est borné, et*

$$K \subset \bigcup_{i=1}^N U_i.$$

Alors, il existe des fonctions $\phi_j \in C_0^\infty(V_i), \phi_j \geq 0$ et telles que

$$\sum_{j=1}^N \phi_j(x) = 1 \quad \forall x \in K$$

Démonstration. Soit $\bar{U}_i \subset V_i$

1. On cherche à construire une fonction continue non négative $f_i(x) \in C_0^\infty(V_i)$ telle que $f_i \equiv 1$ sur un voisinage de U_i .

Observons que

$$\text{dist}(U_i, V_i^c) > 0$$

On choisit $0 < \varepsilon < \text{dist}(U_i, V_i^c)$ pour tout $i = 1, 2, \dots, N$ et on définit la fonction suivante :

$$g : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ t \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \varepsilon/4 \\ (\varepsilon/2 - t)/(\varepsilon/4) & \text{si } \varepsilon/4 < t < \varepsilon/2 \\ 0 & \text{si } t \geq \varepsilon/2 \end{cases}$$

Et on pose $f_i(x) := g(\text{dist}(x, U_i))$; par construction, f_i est continue non négative, vaut 1 si $\text{dist}(x, U_i) \leq \varepsilon/4$ et vaut 0 si $\text{dist}(x, U_i) \geq \varepsilon/2$. En particulier, $f_i(x) = 0$ si $x \notin V_i$ donc $\text{supp}(f_i)$ est un sous-ensemble compact de V_i .

2. On cherche à présent à régulariser les f_i . Soit $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact dans $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$, $\psi \geq 0$ et telle que $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 1$. Pour $\delta > 0$, on définit $\psi_\delta(x) = \delta^{-n} \psi(\frac{x}{\delta})$, alors $\text{supp}(\psi_\delta) \subset B_\delta(0)$, $\psi_\delta \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\delta(x) dx = 1$.

On pose

$$\tilde{\varphi}_i(x) = (f_i * \psi_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_i(x-y) \psi_\delta(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f_i(y) \psi_\delta(x-y) dy$$

On peut faire les constatations suivantes :

- (a) $\tilde{\varphi}_i(x) = 1$ si $x \in \overline{U}_i$ pourvu que $\delta < \varepsilon/4$. En effet, dans l'intégrale, seuls les y tels que $\|y\| < \delta < \varepsilon/4$ contribuent, et, dans ce cas $f_i(x-y) = 1$ si $x \in \overline{U}_i$. Ainsi

$$\tilde{\varphi}_i(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\delta(y) dy = 1$$

- (b) $\tilde{\varphi}_i(x) = 0$ si $x \in V_i^c$. Pour un tel x , on a pour tout $y \in \text{supp}(\psi_\delta)$ (si $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$)

$$\text{dist}(x-y, U_i) \geq \text{dist}(x, U_i) - \|y\| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4} \geq \frac{\varepsilon}{2},$$

donc $f_i(x-y) = 0$ et $\tilde{\varphi}_i(x) = 0$.

- (c) Par la reparamétrisation de l'intégrale on a $\tilde{\varphi}_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

3. On construit à présent les φ_j à partir $\tilde{\varphi}_j$ de sorte que $\sum_{j=1}^N \varphi_j(x) = 1$ sur K . Posons :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \tilde{\varphi}_1, \\ \varphi_2 &= (1 - \tilde{\varphi}_1) \tilde{\varphi}_2, \\ \varphi_3 &= (1 - \tilde{\varphi}_1)(1 - \tilde{\varphi}_2) \tilde{\varphi}_3, \\ &\vdots \\ \varphi_N &= (1 - \tilde{\varphi}_1)(1 - \tilde{\varphi}_2) \dots (1 - \tilde{\varphi}_{N-1}) \tilde{\varphi}_N \end{aligned}$$

Par récurrence, on vérifie que

$$1 - \sum_{j=1}^N \varphi_j = (1 - \tilde{\varphi}_1)(1 - \tilde{\varphi}_2) \dots (1 - \tilde{\varphi}_N)$$

Si $x \in K \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$, alors il existe j tel que $x \in U_j$, donc $\tilde{\varphi}_j(x) = 1$ et par conséquent $1 - \sum_{j=1}^N \varphi_j(x) = 0$. Ainsi $\sum_{j=1}^N \varphi_j(x) = 1$ sur K .

□

Preuve du théorème de Green-Riemann. Par hypothèse, $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in [0, 1]$.

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{pmatrix} \neq 0 \iff \gamma'_1(t) \neq 0 \text{ ou } \gamma'_2(t) \neq 0.$$

Quitte à échanger les rôles de x et y , on peut supposer que

$$\gamma'_2(t_*) \neq 0.$$

On considère alors l'application

$$F(t, y) := \gamma_2(t) - y.$$

On a

$$F(t_*, \gamma_2(t_*)) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial t}(t_*, \gamma_2(t_*)) = \gamma'_2(t_*) \neq 0.$$

Le théorème des fonctions implicites s'applique donc : il existe un voisinage I de t_* , un voisinage J de $\gamma_2(t_*)$ et une fonction $t : J \rightarrow I$ de classe C^1 tels que, pour tout $y \in J$, l'équation

$$\gamma_2(t) = y$$

admet une unique solution $t = t(y)$ avec $t \in I$. En particulier, pour $y \in J$, on peut écrire

$$x = \gamma_1(t) = \gamma_1(t(y)) =: \phi(y),$$

et la fonction ϕ est de classe C^1 comme composition de fonctions C^1 . Ainsi, au voisinage du point $\gamma(t_*)$, la courbe γ est le graphe de la fonction $y \mapsto \phi(y)$. (Si c'est $\gamma'_1(t_*) \neq 0$, on obtient de même que γ est localement le graphe d'une fonction $x \mapsto h(x)$.)

Remarque 8.17 (Rappel). Si $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on appelle $\Gamma := \{(x, f(x)) : x \in I\}$ le graphe de la fonction f .

Pour chaque point $p \in \gamma([0, 1])$, on vient de montrer qu'il existe un voisinage V_i où $\gamma \cap V_i$ est un graphe. Soit $U_i \subset V_i$ tel que $\overline{U_i} \subset V_i$ et $p \in U_i$.

L'ensemble $\gamma([0, 1])$ est compact (image continue d'un segment fermé borné), donc on peut en extraire un recouvrement fini : il existe une famille finie $(U_i, V_i)_{i=1, \dots, L}$ telle que

$$\gamma([0, 1]) \subset \bigcup_{i=1}^L U_i, \quad \text{et } V_i \cap \gamma \text{ est un graphe pour chaque } i.$$

Cependant, $\bigcup_{i=1}^L U_i$ recouvre γ mais pas l'intérieur ouvert entouré par $\gamma : V$. Il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\bigcup_{i=1}^L U_i \supset \{p \in V : \text{dist}(p, \gamma) < \delta\}.$$

Pour ce faire, on peut poser

$$U_{L+1} = \{p \in V \mid \text{dist}(p, \gamma) > \frac{\delta}{2}\},$$

$$V_{L+1} = \{p \in V \mid \text{dist}(p, \gamma) > \frac{\delta}{4}\}.$$

Alors, $\overline{U_{L+1}} \subset V_{L+1}$ et

$$\bigcup_{i=1}^{L+1} U_i \text{ recouvre } \overline{V}.$$

Autrement dit, on a extrait un recouvrement fini de \overline{V} par des ouverts U_i , et des ouverts légèrement plus grands, V_i avec $\overline{U_i} \subset V_i$ pour tout $i = 1, \dots, L+1$.

On applique maintenant la proposition 8.16 avec $K = \bar{V}$ et $(U_i, V_i)_{i=1, \dots, L+1}$. On obtient des fonctions

$$q_j \in C_0^\infty(V_j), \quad q_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{L+1} q_j(x) = 1, \quad \forall x \in \bar{V}.$$

On a alors, pour le champ \mathbf{f} ,

$$\mathbf{f} = \sum_{j=1}^{L+1} q_j \mathbf{f}, \quad \text{sur } \bar{V}.$$

On veut montrer que

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \iint_V \text{rot}(\mathbf{f}) \, dx dy.$$

On utilise la décomposition :

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma} \sum_{j=1}^{L+1} q_j \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{j=1}^{L+1} \int_{\gamma} q_j \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s},$$

et pareil pour l'intégrale de droite,

$$\iint_V \text{rot}(\mathbf{f}) \, dx dy = \iint_V \text{rot} \left(\sum_{j=1}^{L+1} q_j \mathbf{f} \right) dx dy = \sum_{j=1}^{L+1} \iint_V \text{rot}(q_j \mathbf{f}) \, dx dy.$$

Donc il suffit de montrer l'égalité terme par terme : $\int_{\gamma} q_j \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \iint_V \text{rot}(q_j \mathbf{f}) dx dy$. On va utiliser le lemme suivant.

Lemme 8.18. *Soit V un domaine de type I (similaire avec une région de type II), c'est-à-dire un domaine du type*

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, h_1(x) < y < h_2(x)\},$$

avec h_1, h_2 continues et C^1 sur $[a, b]$, et $h_1(x) \leq h_2(x)$. Si on munit le lacet $\gamma =: \partial V$ de l'orientation positive, alors si $\mathbf{f} \in C^1(\bar{V}, \mathbb{R}^n)$. On a $\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \iint_V \text{rot}(\mathbf{f}) dx dy$.

Démonstration du Lemme. On calcule le côté droite, et le côté gauche explicitement.

$$(D) \quad \iint_V (\partial_x f_2 - \partial_y f_1) dx dy = \underbrace{\int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \partial_x f_2(x, y) dx dy}_{(A)} - \underbrace{\int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \partial_y f_1(x, y) dy dx}_{(B)}$$

$$\begin{aligned} (A) &= \int_a^b \frac{d}{dx} \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f_2(x, y) dy \right] dx - \int_a^b h_2'(x) f_2(x, h_2(x)) dx + \int_a^b h_1'(x) f_2(x, h_1(x)) dx \\ &= \int_{h_1(b)}^{h_2(b)} f_2(b, y) dy - \int_{h_1(a)}^{h_2(a)} f_2(a, y) dy - \int_a^b h_2'(x) f_2(x, h_2(x)) dx + \int_a^b h_1'(x) f_2(x, h_1(x)) dx \end{aligned}$$

$$(B) = - \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \partial_y f_1(x, y) dy \right) dx = - \int_a^b f_1(x, h_2(x)) dx + \int_a^b f_1(x, h_1(x)) dx$$

(G) Ensuite par la circulation,

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\gamma_3} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\gamma_4} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}.$$

1. On paramétrise $\gamma_1 = \{(x, h_1(x)), x \in [a, b]\}$. Alors,

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(x, h_1(x)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ h_1'(x) \end{pmatrix} dx = \int_a^b f_1(x, h_1(x)) dx + \int_a^b h_1'(x) f_2(x, h_1(x)) dx$$

2. On paramétrise $y \rightarrow \begin{pmatrix} b \\ y \end{pmatrix}, y \in [h_1(b), h_2(b)]$,

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{h_1(b)}^{h_2(b)} \mathbf{f}(b, y) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dy = \int_{h_1(b)}^{h_2(b)} f_2(b, y) dy.$$

3. Ici on utilise

$$\int_{\gamma_3} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{-\gamma_3} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s},$$

où $-\gamma_3$ est paramétrisé par $x \in [a, b] \rightarrow (x, h_2(x))$. Donc

$$\int_{\gamma_3} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = - \int_a^b (f_1(x, h_2(x)) + h_2'(x) f_2(x, h_2(x))) dx.$$

4. On paramétrise $y \in [h_2(a), h_1(a)] \mapsto (a, y)$, avec l'orientation vers le bas. On obtiens

$$\int_{\gamma_4} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{h_1(a)}^{h_2(a)} f_2(a, y) dy.$$

En additionnant ces 4 termes, on tombe sur l'expression de $(A) - (B)$.

La preuve pour des domaines de type II est analogue. \square

Voyons maintenant comment appliquer ce lemme pour conclure notre preuve.

Sans perdre de généralités, on peut supposer que pour tout $j = 1, \dots, L + 1$, $V_j \cap V$ est de type I ou II. En appliquant le lemme on a que

$$\int_{\partial(V \cap V_j)} q_j \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{V \cap V_j} \text{rot}(q_j \mathbf{f}) dx dy.$$

Montrons que pour tout $j = 1, \dots, L + 1$, $\iint_{\partial(V \cap V_j)} q_j \mathbf{f} = \iint_V q_j \mathbf{f}$. Comme $q_j \mathbf{f}$ est nul en dehors de V_j , on a pour l'intégrale de surface que $\text{rot}(q_j \mathbf{f})(x) = 0$ si $x \notin V_j$. Donc, sur tout V

$$\iint_V \text{rot}(q_j \mathbf{f}) dx dy = \iint_{V \cap V_j} \text{rot}(q_j \mathbf{f}) dx dy.$$

Le bords de $V \cap V_j$ est constitué de deux morceaux : un morceau de γ et un morceau du bord de V_j . Or, comme q_j est a support compact dans V_j , elle est nulle sur le bords de V_j . Donc

$$\int_{\gamma} q_j \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial(V \cap V_j)} q_j \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}.$$

Ce qui conclut la preuve. \square

Question : Caractérisation de champs vectoriels qui dérivent d'un potentiel sur un domaine en \mathbb{R}^2 . Soit $\mathbf{f} \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$, avec $\text{rot}(\mathbf{f}) = 0$. Si Δ est un triangle en U , $\overline{\Delta} \subset U$, alors par le théorème de Green-Riemann 8.12,

$$\int_{\partial\Delta} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Ceci entraîne que si U est étoilé, alors \mathbf{f} dérive d'un potentiel scalaire : comme U est étoilé, il existe un point $\mathbf{a} \in U$ tel que pour tout $\mathbf{x} \in U$, le segment $[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$ est contenu dans U . Soit γ le chemin reliant \mathbf{a} et \mathbf{x} par un segment. On définit

$$g(\mathbf{x}) = \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}.$$

C'est bien défini pour tout $\mathbf{x} \in U$ et pour tout $i = 1, 2$, soit $h > 0$ suffisamment petit tel que $\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i \in U$, où \mathbf{e}_i est un vecteur de la base associé à la i -ième coordonnée. Alors,

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - g(\mathbf{x}) &= \int_{[\mathbf{a}, \mathbf{x} + h\mathbf{e}_i]} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} - \int_{[\mathbf{a}, \mathbf{x}]} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \left(\int_{[\mathbf{a}, \mathbf{x} + h\mathbf{e}_i]} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} - \int_{[\mathbf{a}, \mathbf{x}]} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} - \int_{[\mathbf{x}, \mathbf{x} + h\mathbf{e}_i]} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \right) + \int_{[\mathbf{x}, \mathbf{x} + h\mathbf{e}_i]} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \underbrace{\int_{\partial\Delta_{\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{x} + h\mathbf{e}_i}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}}_{=0} + \int_{[\mathbf{x}, \mathbf{x} + h\mathbf{e}_i]} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_{[\mathbf{x}, \mathbf{x} + h\mathbf{e}_i]} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i} \mathbf{f}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = \int_0^h \mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i dt \\ &= \int_0^h f_1(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) - g(\mathbf{x})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f_1(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) dt = f_1(\mathbf{x})$$

On montre de même que $\frac{\partial g}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x})$, donc

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

Autrement dit \mathbf{f} dérive d'un potentiel.

En fait, on peut définir $g(\mathbf{x}) = \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$, où γ est un segment de ligne droite du centre de U à $\mathbf{x} \in U$, et donc avec la même dérivation qu'en analyse complexe, on a $\nabla g = \mathbf{f}$.

Proposition 8.19. Si $U \subset \mathbb{R}^2$ est simplement connexe, $\mathbf{f} \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$, avec $\text{rot}(\mathbf{f}) = 0$, alors \mathbf{f} dérive d'un potentiel.

Démonstration. Invariance de la circulation sous homotopies : Si γ_1, γ_2 sont deux lacets alors $\int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$. Alternativement, si γ_1, γ_2 sont deux chemins qui lient a, b , telles que $\gamma_{1,2}$ soient homotopes, alors $\int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ (même preuve qu'en analyse complexe).

Alors on peut définir $g(x) = \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$, où γ est un chemin en U qui lie un point fixe $p \in U$ à $x \in U$. $\nabla g = \mathbf{f}$. \square

Remarque 8.20. La liaison avec l'analyse complexe : si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$,

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma} \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{s} + i \int_{\gamma} \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{s}, \quad \text{où } f_1(x, y) = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}.$$

Donc si on est dans la situation de Green-Riemann,

$$\int_{\gamma} \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{s} \stackrel{G-R}{=} \iint \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + \iint \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

par équations de Cauchy-Riemann.

Question : est-ce que ces structures peuvent être généralisées en \mathbb{R}^3 , ou même en \mathbb{R}^n , $n \geq 4$?

Par exemple, si $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, avec $\text{rot}(\mathbf{f}) = 0$, est-ce que \mathbf{f} dérive d'un potentiel?

On va discuter de deux généralisations de Green-Riemann :

— Kelvin-Stokes, Divergence, Gauss-Ostrogradski

8.1.3 Quelques définitions

On pense d'une surface paramétrisée $S \subset \mathbb{R}^2$ comme une généralisation de lacets :

Définition 8.21. Si $U \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine et $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de régularité C^1 , nous appelons $\varphi(S) \subset \mathbb{R}^3$ une surface paramétrisée régulière, pourvu que

1. φ est injective,
2. $\varphi_u \times \varphi_v \neq \mathbf{0}$, où (u, v) sont les coordonnées de \mathbb{R}^2 , et $\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$, \times est le produit vectoriel en \mathbb{R}^3 . C'est équivalent à ce que les vecteurs φ_u, φ_v soient linéairement indépendants partout en U .

Exemple 8.22. Si $U \subset \mathbb{R}^2$, et $\varphi(u, v) = (u, v, 0)$ donne une surface paramétrisée régulière en \mathbb{R}^3 , et $\varphi_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_u \times \varphi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque 8.23. La condition 2. équivaut à la condition que le plan tangent en tout $p \in S$ soit bien défini. Le plan tangent $T_p S$ est l'unique sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 contenant φ_u, φ_v . Alternativement, $T_p S$ est l'espace vectoriel en \mathbb{R}^3 (de deux dimensions) qui est perpendiculaire à $\varphi_u \times \varphi_v$.

Définition 8.24. Soit $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière en \mathbb{R}^3 . Si $f : \varphi(U) = S \rightarrow \mathbb{R}$ on dit que f est continue, pourvu que $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ est continu.

Définition 8.25. Supposons que le support de f soit compacte, f comme les deux définitions précédentes. Alors, on définit

$$\iint_S f ds = \iint_U f \circ \varphi \|\varphi_u \times \varphi_v\| du dv.$$

Ici $\|\bullet\|$ est la norme euclidienne d'un vecteur en \mathbb{R}^3 .

Définition 8.26. Soit (S, φ) une surface paramétrée et soit $V \subseteq \mathbb{R}^2$, un domaine si $\psi : V \rightarrow U$ est un difféomorphisme C^1 , alors, on appelle la paramétrisation $\varphi \circ \psi : V \rightarrow S$ une reparamétrisation de (S, φ) .

Lemme 8.27. L'intégrale est invariante sous reparamétrisation. Alors, si on pose $\tilde{\varphi} := \varphi \circ \psi$, on a

$$\iint_U f \circ \varphi \cdot \|\varphi_u \times \varphi_v\| du dv = \iint_V f \circ \tilde{\varphi} \cdot \|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\| d\tilde{u} d\tilde{v}$$

où (\tilde{u}, \tilde{v}) sont les coordonnées cartésiennes pour $V \subseteq \mathbb{R}^2$

Démonstration. Écrivons $\psi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\psi^1(\tilde{u}, \tilde{v}), \psi^2(\tilde{u}, \tilde{v}))$. On a ensuite

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{\tilde{u}} &= (\varphi \circ \psi)_{\tilde{u}} = \psi_{\tilde{u}}^1 \varphi_u + \psi_{\tilde{u}}^2 \varphi_v \\ \tilde{\varphi}_{\tilde{v}} &= (\varphi \circ \psi)_{\tilde{v}} = \psi_{\tilde{v}}^1 \varphi_u + \psi_{\tilde{v}}^2 \varphi_v \end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}} &= (\psi_{\tilde{u}}^1 \varphi_u + \psi_{\tilde{u}}^2 \varphi_v) \times (\psi_{\tilde{v}}^1 \varphi_u + \psi_{\tilde{v}}^2 \varphi_v) = \psi_{\tilde{u}}^1 \psi_{\tilde{v}}^2 \varphi_u \times \varphi_v + \psi_{\tilde{u}}^2 \psi_{\tilde{v}}^1 \varphi_v \times \varphi_u \\ &= \varphi_u \times \varphi_v (\psi_{\tilde{u}}^1 \psi_{\tilde{v}}^2 - \psi_{\tilde{u}}^2 \psi_{\tilde{v}}^1) \end{aligned}$$

Alors

$$\|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\| = \|\varphi_u \times \varphi_v\| \cdot |D\psi(\tilde{u}, \tilde{v})|$$

Et on conclut

$$\begin{aligned} \iint_V f \circ \tilde{\varphi} \|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\| \, d\tilde{u} \, d\tilde{v} &= \iint_V f \circ \tilde{\varphi} \|(\varphi_u \times \varphi_v)(\psi(\tilde{u}, \tilde{v}))\| \cdot |D\psi(\tilde{u}, \tilde{v})| \, d\tilde{u} \, d\tilde{v} \\ &= \iint_U f \circ \varphi \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, du \, dv \end{aligned}$$

□

Définition 8.28. Soit (S, φ) une surface paramétrée régulière en \mathbb{R}^3 , on appelle orientation un choix de vecteur \mathbf{n} normal et unitaire en chaque $p \in S$ qui dépend continûment de p , c'est-à-dire normale $\mathbf{n} \perp T_p S$ et $\|\mathbf{n}\| = 1$ en tout point.

Exemple 8.29. On peut exprimer un choix de \mathbf{u} en terme de la paramétrisation

$$\mathbf{n} := \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \quad \text{ou} \quad \mathbf{n} := -\frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

Définition 8.30. Soit (S, φ) , une surface paramétrée régulière en \mathbb{R}^3 munie d'une orientation \mathbf{n} . Alors, si $\mathbf{f} \in C^0(S, \mathbb{R}^3)$ est un champ vectoriel continu sur S , on appelle l'intégrale

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, ds$$

le flux de \mathbf{f} à travers (S, φ, \mathbf{n}) .

Théorème 8.31 (Kelvin-Stokes). Soit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine tel que \bar{U} est compact et ∂U est un lacet simple et régulier muni de l'orientation position positive. Soit $\varphi \in C^1(\bar{U}, \mathbb{R}^3)$ une paramétrisation régulière de la surface $S = \varphi(\bar{U})$ avec $\partial S = \varphi(\partial U)$.

Si $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, alors, on a

$$\iint_S \text{rot}(\mathbf{f}) = \int_{\partial S} \mathbf{f} \cdot ds$$

où $\mathbf{n} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$ et ∂S est paramétré par $\varphi \circ \gamma$

Démonstration. Idée de rédaction de Green-Riemann en \mathbb{R}^2 . Pour des raisons techniques, on va supposer $\varphi \in C^2$.

On introduit le champ vectoriel $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$, donné par $g_1 = \mathbf{f}(\varphi) \cdot \varphi_u \in \mathbb{R}$ et $g_2 = \mathbf{f}(\varphi) \cdot \varphi_v \in \mathbb{R}$.

On observe que, par définition

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \mathbf{f} \cdot ds &= \int_0^1 \mathbf{f} \circ \varphi \cdot \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma) dt \\ &= \int_0^1 (f \circ \varphi) \circ \gamma \cdot (\gamma'_1 \varphi_u + \gamma'_2 \varphi_v) dt \\ &= \int_0^1 ((f \circ \varphi) \circ \gamma \cdot \varphi_u \gamma'_1 + (f \circ \varphi) \circ \gamma \cdot \varphi_v \gamma'_2) \\ &= \int_{\partial U} \mathbf{g} \cdot ds \end{aligned}$$

On applique alors Green-Riemann pour le champ vectoriel \mathbf{g}

$$\int_{\partial U} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \iint_u \text{rot}(\mathbf{g}) \, du \, dv$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{g}) &= \partial_u g_2 - \partial_v g_1 \\ \partial_u g_2 &= \partial_u [\mathbf{f}(\varphi) \cdot \varphi_v] = \partial_u [\mathbf{f}(\varphi)] \cdot \varphi_v + \mathbf{f}(\varphi) \varphi_{uv} \\ \partial_v g_1 &= \partial_v [\mathbf{f}(\varphi) \cdot \varphi_u] = \partial_v [\mathbf{f}(\varphi)] \cdot \varphi_u + \mathbf{f}(\varphi) \varphi_{uv} \end{aligned}$$

Où on peut écrire

$$\partial_u [\mathbf{f}(\varphi)] = \partial_u \begin{pmatrix} f_1 \circ \varphi \\ f_2 \circ \varphi \\ f_3 \circ \varphi \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} \partial_u (f_1 \circ \varphi) &= \partial_1 f_1 \circ \varphi \cdot \varphi_u^1 + \partial_2 f_1 \circ \varphi \cdot \varphi_u^2 + \partial_3 f_1 \circ \varphi \cdot \varphi_u^3 \\ \partial_u (f_2 \circ \varphi) &= \partial_1 f_2 \circ \varphi \cdot \varphi_u^1 + \partial_2 f_2 \circ \varphi \cdot \varphi_u^2 + \partial_3 f_2 \circ \varphi \cdot \varphi_u^3 \\ \partial_u (f_3 \circ \varphi) &= \partial_1 f_3 \circ \varphi \cdot \varphi_u^1 + \partial_2 f_3 \circ \varphi \cdot \varphi_u^2 + \partial_3 f_3 \circ \varphi \cdot \varphi_u^3 \end{aligned}$$

Où $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, d'où

$$\partial_u [\mathbf{f} \circ \varphi] = D\mathbf{f} \cdot \varphi_u \quad \text{avec} \quad D\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \partial_3 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \partial_3 f_2 \\ \partial_1 f_3 & \partial_2 f_3 & \partial_3 f_3 \end{pmatrix}$$

Alors on peut modifier le calcul initial

$$\text{rot}(\mathbf{g}) = \partial_u g_2 - \partial_v g_1 = (D\mathbf{f} \varphi_u) \cdot \varphi_v - (D\mathbf{f} \varphi_v) \cdot \varphi_u$$

On réécrit alors la matrice $D\mathbf{f}$ comme somme d'une matrice symétrique et antisymétrique :

$$D\mathbf{f} = \underbrace{\frac{1}{2}(D\mathbf{f} + D\mathbf{f}^\top)}_{A_s} + \underbrace{\frac{1}{2}(D\mathbf{f} - D\mathbf{f}^\top)}_{A_a}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} (A_s \varphi_u) \cdot \varphi_v - (A_s \varphi_v) \cdot \varphi_u &= (A_s \varphi_u)^\top \varphi_v - (A_s \varphi_v)^\top \varphi_u \\ &= \varphi_u^\top A_s \varphi_v - \varphi_v^\top A_s \varphi_u && A_s \text{ est symétrique} \\ &= \varphi_u^\top A_s \varphi_v - \varphi_u^\top A_s \varphi_v \\ &= 0 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \partial_u g_2 - \partial_v g_1 &= \varphi_u^\top D\mathbf{f}^\top \varphi_v - \varphi_v^\top D\mathbf{f}^\top \varphi_u \\ &= \varphi_u^\top (A_s + A_a)^\top \varphi_v - \varphi_v^\top (A_s + A_a)^\top \varphi_u \\ &= \underbrace{\varphi_u^\top A_s \varphi_v - \varphi_v^\top A_s \varphi_u}_{=0} + \varphi_u^\top A_a^\top \varphi_v - \varphi_v^\top A_a^\top \varphi_u \\ &= \varphi_u^\top A_a^\top \varphi_v + \varphi_u^\top A_a^\top \varphi_u \\ &= 2\varphi_u^\top A_a^\top \varphi_u \\ &= \varphi_u^\top (D\mathbf{f}^\top - D\mathbf{f}) \varphi_v \end{aligned}$$

On calcule alors explicitement

$$D\mathbf{f}^\top - D\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 & \partial_1 f_3 - \partial_3 f_1 \\ \partial_2 f_1 - \partial_1 f_2 & 0 & \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 & \partial_3 f_2 - \partial_2 f_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Il reste alors à voir (en exercice) que

$$\mathbf{v}^\top (D\mathbf{f}^\top - D\mathbf{f})\mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \text{rot}(\mathbf{f})$$

Et on pourra conclure

$$\iint_U (\partial_u g_2 - \partial_v g_1) \iint_U \varphi_u \times \varphi_v \cdot \text{rot}(\mathbf{f}) \, du \, dv = \iint_U \mathbf{n} \cdot \text{rot}(\mathbf{f}) \, d\sigma$$

□

On cherche alors à trouver quel champ vectoriel dérivent d'un potentiel scalaire

Proposition 8.32. *Si U est simplement connexe, $\mathbf{f} \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ dérive d'un potentiel scalaire si et seulement si $\text{rot}(\mathbf{f}) = \mathbf{0}$.*

Esquisse de la preuve.

1. Si $U = \Delta$ un triangle de \mathbb{R}^3 , alors

$$\iint_U \text{rot}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{u} \, d\sigma = \iint_{\partial U} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$$

Si U est étoilé alors $\text{rot}(\mathbf{f}) = \mathbf{0}$ implique $\mathbf{f} = \nabla g$

2. Invariance de circulation sous homotopies
3. On définit

$$q(x) = \int_\gamma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{où } \gamma \text{ lie } p \in U \text{ à } x \in U$$

□

8.2 Théorème de la Divergence / Gauss-Ostrogradsky

On introduit alors le théorème de Gauss-Ostrogradsky, aussi appelé théorème de la divergence.

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^3$ un domaine borné par une surface S compacte, fermée et régulière (C^1). Alors on a les équivalences suivantes :

$\iff S$ est localement une surface paramétrée régulière (de classe C^1)

$\iff \forall p \in S, \exists \delta > 0$ tel que $B_\delta(p) \cap S$ admet une paramétrisation C^1 régulière.

Par le théorème des fonctions implicites, on peut supposer que $B_\delta(p) \cap S$ est le graphe d'une fonction, soit de (x, y) , soit de (x, z) , soit de (y, z) .

Théorème 8.33. *Soit $U \subset \mathbb{R}^3$, un domaine borné par S , une surface compacte fermée (sans bord) et régulière (comme ci-dessus). Alors, si \mathbf{n} est l'orientation de S qui pointe vers l'extérieur et $\mathbf{f} \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$, alors on a*

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_U \text{div}(\mathbf{f}) \, dx \, dy \, dz$$

où $\text{div}(\mathbf{f}) = \nabla \cdot \mathbf{f} = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3$ où $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$

Démonstration.

— Parce que S est C^1 , pour tout point $p \in S$, il existe un $\delta > 0$ tel que $B_\delta(p) \cap S$ soit le graphe d'une fonction C^1 d'un des trois types suivants :

- (I) $S \cap V$ est donné par $z = h(x, y)$,
- (II) $S \cap V$ est donné par $y = h(x, z)$,
- (III) $S \cap V$ est donné par $x = h(y, z)$.

Comme S est compacte, on peut extraire un sous-recouvrement fini,

$$S \subset \bigcup_{j=1}^L V_j,$$

où chaque V_j est un ouvert, et où $S \cap V_j$ est un graphe (d'un des trois types ci-dessus).

On pose V_{L+1} tel que $\bar{U} \subset \bigcup_{j=1}^{L+1} V_j$ (donc on couvre tout U et pas seulement S), et $V_{L+1} \cap S = \emptyset$. Soit $\{\varphi_j\}_{j=1}^{L+1}$ une partition de l'unité par rapport à $\{V_j\}$, c'est-à-dire que $\varphi_j \in C_0^\infty(V_j)$, $\varphi_j \geq 0$ pour tout $j = 1, \dots, L$ et $\sum_{j=1}^{L+1} \varphi_j(x) = 1$ pour tout $x \in \bar{U}$.

En particulier, on a que

$$\mathbf{f} = \sum_{j=1}^{L+1} \varphi_j \mathbf{f}.$$

Donc, par la linéarité de la divergence et de l'intégrale,

$$\iiint_U \operatorname{div} \mathbf{f} = \sum_{j=1}^{L+1} \iiint_U \operatorname{div}(\varphi_j \mathbf{f}).$$

De même,

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \sum_{j=1}^{L+1} \iint_S \varphi_j \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Pour conclure la preuve, il nous suffit donc de montrer que

$$\iiint_U \operatorname{div}(\varphi_j \mathbf{f}) \, dV = \iint_S \varphi_j \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma. \quad (8.3)$$

Observons que si $j = L + 1$, alors $\operatorname{supp}(\varphi_{L+1}) \subset V_{L+1}$ et $V_{L+1} \cap S = \emptyset$, donc le terme $\iint_S \varphi_{L+1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0$. Si $1 \leq j \leq L$, alors comme $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset V_j$,

$$\iint_S \varphi_j \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{S \cap V_j} \varphi_j \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Lemme 8.34. Soit $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Soit $h : R \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ de classe $C^1(\bar{R})$. On fixe $\ell > 0$ tel que $0 < h \leq \ell$ sur R , et on considère la boîte

$$B = R \times [0, \ell] \subset \mathbb{R}^3.$$

On définit le domaine "sous le graphe" de h par

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R, 0 < z < h(x, y)\}.$$

Soit $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ dont le support compact est contenu dans B . Alors

$$\iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{f}) \, dx dy dz = \iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

Remarque 8.35. Comme $\text{supp}(f) \subset V$ est un sous-ensemble compact, on a que $\mathbf{f}|_{\text{faces planes}} = 0$, i.e. sur les faces où $x = a$ ou $x = b$, $y = c$ ou $y = d$ et $z = 0$. Par conséquent, dans le flux $\iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$, seules les contributions provenant de la face $z = h(x, y)$ peuvent subsister.

Démonstration. Comme pour Green-Riemann, on calcule les deux côtés. Côté gauche : Par Fubini,

$$\iiint_V \text{div } \mathbf{f} \, dx dy dz = \int_a^b \int_c^d \left(\int_0^{h(x,y)} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dz \right) dy dx.$$

On décompose :

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\int_a^b \int_c^d \left(\int_0^{h(x,y)} \frac{\partial f_1}{\partial x} dz \right) dy dx}_{(1)} + \underbrace{\int_a^b \int_c^d \left(\int_0^{h(x,y)} \frac{\partial f_2}{\partial y} dz \right) dy dx}_{(2)} \\ &\quad + \underbrace{\int_a^b \int_c^d \left(\int_0^{h(x,y)} \frac{\partial f_3}{\partial z} dz \right) dy dx}_{(3)}. \end{aligned}$$

Calculons séparément (1), (2) et (3) :

Calcul de (1). En dérivant sous le signe intégrale avec borne supérieure variable (règle de Leibniz), on obtient :

$$(1) = \int_a^b \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{h(x,y)} f_1(x, y, z) dz \right) dy dx - \int_a^b \int_c^d h_x(x, y) f_1(x, y, h(x, y)) dy dx.$$

On inverse ensuite l'ordre des intégrales dans le premier terme :

$$\int_a^b \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{h(x,y)} f_1(x, y, z) dz \right) dy dx = \int_c^d \left[\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{h(x,y)} f_1(x, y, z) dz \right) dx \right] dy.$$

Par le théorème fondamental de l'analyse,

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{h(x,y)} f_1(x, y, z) dz \right) dx = \left(\int_0^{h(b,y)} f_1(b, y, z) dz \right) - \left(\int_0^{h(a,y)} f_1(a, y, z) dz \right).$$

Or, ces deux termes sont nuls puisque $\mathbf{f} = 0$ sur les faces $x = a$ et $x = b$ par hypothèse.

Donc ce premier terme vaut 0 et finalement :

$$(1) = - \int_a^b \int_c^d h_x(x, y) f_1(x, y, h(x, y)) dy dx.$$

Calcul de (2). De manière similaire, on obtient que

$$(2) = - \int_a^b \int_c^d h_y(x, y) f_2(x, y, h(x, y)) dy dx.$$

Calcul de (3). Cette fois-ci on la calcule d'une autre manière,

$$(3) = \int_a^b \int_c^d \left(\int_0^{h(x,y)} \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) dz \right) dy dx = \int_a^b \int_c^d f_3(x, y, h(x, y)) dy dx$$

On doit montrer que (1) + (2) + (3) = $\iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$. On remarque qu'ici la seule partie de S qui contribue à l'intégrale est

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R, z = h(x, y)\},$$

car les autres morceaux de ∂V sont des faces planes où $\mathbf{f} = 0$. On paramétrise S_1 par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y, h(x, y)) \end{array}$$

Alors $\varphi_x = (1, 0, h_x)$ et $\varphi_y = (0, 1, h_y)$, et $\varphi_x \times \varphi_y = (-h_x, -h_y, 1)$. La normale unitaire est donc

$$\mathbf{n} = \pm \frac{(-h_x, -h_y, 1)}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}$$

où le signe est choisi tel que \mathbf{n} pointe vers l'extérieur de V (dans ce cas, la composante en z doit être positive, donc on prend le signe +).

De plus,

$$d\sigma = \|\varphi_x \times \varphi_y\| dx dy = \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2} dx dy,$$

donc

$$\mathbf{n} \, d\sigma = (-h_x, -h_y, 1) \, dx dy.$$

Ainsi,

$$\iint_{S_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_R \mathbf{f}(x, y, h(x, y)) \cdot (-h_x, -h_y, 1) \, dx dy,$$

c'est-à-dire

$$\iint_{S_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_a^b \int_c^d (f_3(x, y, h(x, y)) - h_x(x, y)f_1(x, y, h(x, y)) - h_y(x, y)f_2(x, y, h(x, y))) \, dy dx.$$

En comparant avec l'expression obtenue pour (1) + (2) + (3), on conclut. □

□

8.2.1 Quelques exemples physiques

Equation de chaleur

Question. Comment décrire la température d'un solide comme fonction du temps t et de la position (x, y, z) ?

On note la température $u = u(t, x, y, z)$.

Considérations heuristiques. Pour un domaine matériel $U \subset \mathbb{R}^3$ (de bord $S = \partial U$), on interprète

$$\iiint_U u \, dx \, dy \, dz$$

comme le *contenu calorifique* de U (à une constante près).

Le changement temporel de cette quantité est

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_U u \, dx \, dy \, dz \right) = \iiint_U u_t \, dx \, dy \, dz.$$

En supposant une loi de flux du type "flux $\propto \nabla u$ " avec constante c (constante du matériau), on obtient :

$$\iiint_U u_t \, dx \, dy \, dz = c \iint_S \nabla u \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = c \iiint_U \operatorname{div}(\nabla u) \, dx \, dy \, dz = c \iiint_U \Delta u \, dx \, dy \, dz.$$

Et on rappelle l'identité :

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u.$$

Equations de Maxwell (électromagnétisme)

Deux champs vectoriels :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, x, y, z), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(t, x, y, z).$$

Dans le vide :

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{B}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E},$$

et

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Donc les composantes de \mathbf{E} et \mathbf{B} sont solution de l'équation des ondes. Par exemple :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{B}) = \text{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\text{rot}(\text{rot } \mathbf{E}) = \Delta \mathbf{E} - \nabla(\text{div } \mathbf{E}) = \Delta \mathbf{E},$$

puisque $\text{div } \mathbf{E} = 0$.

Plus précisément (équation des ondes) :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{E} = 0,$$

et de même pour \mathbf{B} .

8.2.2 Champ vectoriel généré par une distribution de masse

Pour décrire la répartition de la masse dans l'espace, on utilise la fonction $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ qu'on appelle densité avec $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Commençons par remarquer que \mathbf{F} dérive d'un potentiel $\mathbf{F} = \nabla V$ où V est le potentiel gravitationnel généré par la masse et on peut décrire ce vecteur par

$$\Delta V = 4\pi G \rho \tag{8.4}$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla \cdot \nabla$.

Proposition 8.36. *Si $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, alors 8.4 admet une unique solution $V \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ avec la propriété que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = 0$$

Démonstration. On va commencer par exhiber une solution unique de 8.4 avec les propriétés désirées puis on montrera ensuite qu'elle est unique.

On pose

$$V(x) = \Gamma * f(x) = \iiint \Gamma(x-y) \cdot f(y) dy, \quad f(y) = 4\pi G \rho(y)$$

avec $\Gamma(y) = -\frac{1}{4\pi \|y\|} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ qui explose à l'origine et où on note $\|y\|$ comme la longueur euclidienne usuelle.

On montre un premier résultat

Lemme 8.37. *La fonction $V(x)$ ci-dessus est une fonction $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, en particulier, l'intégrale $\iiint \Gamma(x-y) \cdot f(y) dy$ converge et on a $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = 0$*

Démonstration. On commence par régulariser l'intégrale comme suit :

Soit $\varepsilon > 0$, on remplace l'intégrale pour

$$\iiint \Gamma(x-y)f(y)dy = \iiint \Gamma(y)f(x-y)dy$$

(où on a effectué un changement de variables $x \rightarrow x-y$) par

$$\iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)f(x-y)dy$$

Comme ρ a un support compact, alors $f = c\rho$ où $c = 4\pi G$ a également un support compact. On fixe ensuite $x \in \mathbb{R}^3$ et on a que la fonction $y \rightarrow f(x-y)$ a support compact. Donc on peut réécrire

$$\iiint_{B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)f(x-y)dy$$

où R est suffisamment grand pour que $f(x-y) = 0, \forall y \in B_R^C(0)$. Alors cette intégrale converge au sens de Riemann si et on laisse $\varepsilon \rightarrow 0$.

Observons à présent que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{B_R \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)f(x-y)dy$$

existe localement uniformément en x (preuve en exercice) car l'explosion de $\Gamma(y)$ si $y \rightarrow 0$ est suffisamment faible.

On a alors que

$$V(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)f(x-y)dy$$

existe localement uniformément et est donc une fonction continue de x . On affirme qu'en fait $V \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ et si on revisite les intégrales tronquées

$$\iiint_{B_R \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)f(x-y)dy =: V_\varepsilon(x), \quad \varepsilon > 0$$

Et, d'après des résultats d'analyse 2, on peut différencier ces fonctions, on rappelle

$$\nabla_x^\alpha := \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^3$$

et on a

$$\nabla^\alpha V_\varepsilon(x) = \iint_{B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma(y) \nabla_x^\alpha f(x-y)dy$$

on a donc que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nabla_x^\alpha V_\varepsilon(x)$ existe localement uniformément en x et est égal à

$$\iiint \Gamma(x) \nabla_x^\alpha f(x-y)dy$$

qui est une fonction continue de x . D'après l'analyse 2, ceci implique que $\nabla^\alpha V$ existe et qu'on a

$$\nabla^\alpha V = \iiint \Gamma(y) \nabla_x^\alpha f(x-y)dy, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_{\geq 0}^3$$

ce qui implique que $V = \Gamma * f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Il reste alors à montrer que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = 0$, on observe donc que

$$V(x) = \iiint \Gamma(y)f(x-y)dy = \iiint \Gamma(x-y)f(y)dy \quad \text{et} \quad \Gamma(x-y) = -\frac{1}{4\pi\|x-y\|} \xrightarrow[|y \text{ fixe}]{|x| \rightarrow \infty} 0$$

Et on peut borner

$$\begin{aligned}
|V(x)| &= \left| \iiint \Gamma(x-y)f(y)dy \right|, & \|x\| \gg 1 \\
&\leq \max_{y \in \text{supp}(f)} |\Gamma(x-y)| \underbrace{\iiint |f(y)dy|}_{C_2} \\
&\leq \frac{C_1}{\|x\|} \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} 0
\end{aligned}$$

□

Terminologie : On appelle la fonction $V = \Gamma * f$ le potentiel de Newton associé à f

On prouve à présent un second résultat

Lemme 8.38 (Application du théorème de divergence). *Le potentiel de Newton résout $\nabla V = f$*

Ce lemme va en fait nous servir pour montrer

1. $\frac{1}{\|x\|}$ satisfait $\Delta(\frac{1}{\|x\|}) = 0$ si $x \neq 0$
2. $\frac{-xc}{\|x\|^3}$ est une expression de la force générée par une masse

Preuve du lemme. On va chercher à utiliser

$$\nabla V(x) = \iiint \Gamma(y)\Delta_x f(x-y)dy$$

et effectuer une intégration par parties pour enlever les dérivées de f . Pour cela, on doit effectuer une troncature pour contrôler la singularité de Γ en $y = 0$

$$V_\varepsilon(x) = \iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)f(x-y)dy = \iiint_{B_r \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)f(x-y)dy$$

On doit alors utiliser des relations différentielles basiques, pour $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$\nabla f \cdot \nabla g = \nabla \cdot (f\nabla g) - f \underbrace{\nabla \cdot \nabla g}_{\Delta g} \quad \text{et} \quad f \cdot \Delta g = \nabla \cdot (f\nabla g) - \nabla f \cdot \nabla g$$

Or

$$\Delta V_\varepsilon(x) = \iiint_{B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)\Delta f(x-y)dy \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nabla V_\varepsilon(x) = \Delta V(x)$$

On considère alors

$$\Delta V_\varepsilon(x) = \iiint_{B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)\Delta f(x-y)dy \tag{8.5}$$

Puis on fixe x et on laisse uniquement y varier, c'est-à-dire

$$\Delta f(x-y) = \Delta_y f(x-y)$$

On peut alors transformer l'équation 8.5 pour la réécrire

$$\Delta_\varepsilon V(x) = \iiint_{B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)\Delta_y f(x-y)dy$$

Où on réécrit

$$\Gamma(y) \cdot \Delta_y f(y) = \nabla \cdot (\Gamma(y)\nabla_y f(x-y)) - \nabla_y \Gamma(y) \cdot \nabla f(x-y) = \text{div}(\Gamma(y) \cdot \nabla_y f(x-y))$$

Alors

$$\Delta V_\varepsilon(x) = \underbrace{\iiint_{B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \operatorname{div}(\Gamma(y) \cdot \nabla_y f(x-y)) dy}_{(I)} - \underbrace{\iiint_{B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla_y \Gamma \cdot \nabla_y f(x-y) dy}_{(II)}$$

On s'intéresse alors aux deux parties de l'expression séparément

$$(I) = \underbrace{\iint_{\partial B_R(0)} \Gamma(y) \mathbf{n} \cdot \nabla_y f(x-y) d\sigma}_{=0} - \underbrace{\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \Gamma(y) \mathbf{n} \cdot \nabla f(x-y) d\sigma}_{\text{converge vers 0 quand } \varepsilon \rightarrow 0}$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal avec l'orientation extérieure. Si $R \gg 1$ suffisamment grand, on a que $f(x-y)|_{\partial B_r(0)=0}$ alors $(I) = 0$

On s'intéresse alors à la deuxième partie (II) de l'expression initiale. Pour cela, on va appliquer le théorème de la divergence :

$$\nabla_y \Gamma \cdot \nabla_y f(x-y) = \nabla_y \cdot (\nabla_y \Gamma(y) f(x-y)) - f(x-y) \underbrace{\nabla_y \cdot \nabla_y \Gamma}_{\Delta_y \Gamma} = 0, \text{ si } y \neq 0$$

Et, une autre application du théorème de la divergence nous implique que

$$(II) = - \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \mathbf{n} \cdot \nabla_y \Gamma(y) f(x-y) d\sigma - \underbrace{\iint_{\partial B_r(0)} \mathbf{n} \cdot \nabla_y \Gamma(y) f(x-y) d\sigma}$$

Il reste à déterminer la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \mathbf{n} \cdot \nabla_y \Gamma(y) \cdot f(x-y) d\sigma$$

où \mathbf{n} est défini comme auparavant donc $\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$ et on peut écrire

$$-\mathbf{n} \cdot \nabla_y \Gamma = \frac{\nabla_y \Gamma}{\|\mathbf{y}\|} \cdot \nabla_y \Gamma(y)$$

et

$$\nabla_y \Gamma(y) = \nabla_y \left(\frac{-1}{4\pi \|\mathbf{y}\|} \right) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^3}$$

et enfin

$$-\mathbf{n} \cdot \nabla_y \Gamma(y) = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} = \frac{1}{4\pi \|\mathbf{y}\|}$$

Et on écrit finalement

$$f(x-y) = f(x) + o(\|y\|)$$

où $o(\|y\|)$ est borné par $C\|y\|$, Alors

$$\begin{aligned} (II) &= \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{1}{4\pi \|\mathbf{y}\|^2} f(x) d\sigma + \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{1}{4\pi \|\mathbf{y}\|^2} o(\|y\|) d\sigma \\ &= \underbrace{\frac{f(x)}{4\pi \varepsilon^2} \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} 1 \cdot d\sigma}_{=f(x)} + o(\varepsilon) \end{aligned} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} o(\varepsilon) = 0$$

alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta V_\varepsilon = f$$

□

Il reste à montrer que $V = \Gamma * f$ est la seule solution C^∞ qui satisfait $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = 0$.

Supposons qu'il existe $\tilde{V} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ avec $\Delta \tilde{V} = f$ et $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \tilde{V}(x) = 0$. Alors, si on pose $u = V - \tilde{V} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, on satisfait

$$\Delta u = \Delta V - \Delta \tilde{V} = f - f = 0$$

Donc u est une fonction harmonique et, satisfait (*) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$. On observe alors que $u \equiv 0$, de plus, si $p \in \mathbb{R}^3$, on a

$$u(p) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\partial R(p)} u(y) dy$$

Et, d'après un exercice de série, si on laisse $R \rightarrow \infty$ et qu'on utilise la propriété (*), il suit que $u(p) = 0$. □